CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte : 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$, notée I_n, converge.

2) a) Calculer I_0.
   b) Pour tout entier naturel n, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
   c) En déduire I_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

3) a) Justifier que l'on définit bien une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant :

$$f(x,y)=\int_0^{+\infty}(1+xt+yt^2)^2\,e^{-t}dt$$

   b) Donner l'expression explicite de $f(x,y)$ et en déduire que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
   c) Déterminer le seul point critique (a, b) de f.
   d) Établir alors que f admet un minimum local, que l'on note m, en (a, b). Donner la valeur de m.
   e) Développer $\left(x+3y+\frac{1}{2}\right)^2$ puis en déduire une écriture de $f(x,y)-m$ qui permet de vérifier que m est un minimum global de f.

4) On considère une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre 1 et on pose, pour tout couple (x,y) de réels :

$$Y_{x,y}=1+xX+yX^2$$

   a) Déterminer, en fonction de x et y, l'espérance de $Y_{x,y}$.
   b) Utiliser le résultat de la question 3b) afin d'exprimer la variance de $Y_{x,y}$ en fonction de x et y.
   c) Déterminer pour quelles valeurs de x et y cette variance est minimale. Aurait-on pu prévoir ces valeurs sans faire ces calculs ?

Exercice 2

Dans cet exercice, n et N désignent deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel k de $[\![0,N-1]\!]$, on a :

$$\frac{1}{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n\leq\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}t^n dt\leq\frac{1}{N}\left(\frac{k+1}{N}\right)^n$$

   b) En déduire que :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\leq\frac{1}{n+1}$$

2) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,N]\!]$.
   a) Justifier que, pour tout k de $[\![1,N]\!]$, on a : $P(Y=k)=P(Y>k-1)-P(Y>k)$.
En déduire que :

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{N-1}P(Y>k)$$

   b) Montrer de même que :

$$E(Y(Y-1))=2\sum_{k=0}^{N-1}kP(Y>k)$$

Une urne contient des boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages au hasard d'une boule avec remise à chaque fois de la boule tirée et on note X_i le numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage. On admet que les variables $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes.
On suppose N inconnu et on cherche à l'estimer grâce à deux estimateurs différents

3) On considère la variable aléatoire M_n, égale à la moyenne empirique de l'échantillon $(X_1,\dots,X_n)$. On a donc : $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Calculer l'espérance de M_n et en déduire un estimateur sans biais M_n' de N.

b) Calculer le risque quadratique de M_n'. Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

4) On considère maintenant la variable aléatoire Z_n définie par : $Z_n = \text{Max}(X_1,\dots,X_n)$.

a) On note F_n la fonction de répartition de Z_n.

Donner la valeur de $F_n(k)$ pour tout k de $Z_n(\Omega)$.

b) Utiliser les questions précédentes pour en déduire que : $E(Z_n) \geq N - \dfrac{N}{n+1}$. Établir alors que Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de N.

c) Déterminer $E\big(Z_n(Z_n-1)\big)$ et vérifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(Z_n(Z_n-1)\big) = N(N-1)$.

En déduire que le risque quadratique de Z_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1) a) Déterminer la seule valeur propre de A ainsi que le sous-espace propre qui y est associé.

b) Démontrer que A n'est pas diagonalisable.

2) On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est la matrice A.

a) On pose $u_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer a pour que $Au_2 = u_1 + u_2$.

b) Vérifier que (u_1,u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice T de φ dans cette base.

c) Déterminer la matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$ puis expliciter P^{-1}.

On se propose de trouver les fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que $f(0) = g(0) = 1$, et qui sont solutions du système :

$$(S)\ :\ \forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x) = 5f(x) + 16g(x) \\ g'(x) = -f(x) - 3g(x) \end{cases}$$

On suppose que ce système a des solutions f et g et on pose :

$$C(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \text{ et } C'(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ g'(x) \end{pmatrix}$$

3) a) Écrire le système (S) à l'aide de la matrice A.

b) On pose $D'(x) = P^{-1}C'(x)$ et $D(x) = P^{-1}C(x)$. Écrire l'égalité liant $D'(x)$ et $D(x)$.

On pose $D(x) = \begin{pmatrix} h(x) \\ k(x) \end{pmatrix}$ et $D'(x) = \begin{pmatrix} h'(x) \\ k'(x) \end{pmatrix}$

4) a) Montrer que l'on a $h(0) = 1$, $k(0) = -5$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} h'(x) = h(x) + k(x) \\ k'(x) = k(x) \end{cases}$.

b) Soit la fonction y définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = k(x)e^{-x}$.

Montrer que y est constante et en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $k(x) = -5e^{x}$.

c) Soit la fonction z définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $z(x) = xe^{x}$.

Écrire $z'(x)$ en fonction de $z(x)$ puis en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(h+5z)'(x) = (h+5z)(x)$.

d) En utilisant la même technique qu'à la question 4b), établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = (-5x+1)e^{x}$$

e) En déduire les fonctions f et g.

5) Donner les solutions du système (S).

6) Tracer dans un même repère orthogonal l'allure des courbes représentatives de f et g. On donne les valeurs approchées $\exp\left(-\frac{21}{20}\right) \simeq 0{,}35$ et $\exp\left(-\frac{4}{5}\right) \simeq 0{,}45$.

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

CORRIGE

Exercice 1

1) $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ est une fois impropre en $+\infty$.

Pour tout entier naturel n, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{n+2}e^{-t} = 0$ donc on en déduit : $t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

On sait, de plus, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann de paramètre 2). Les fonctions $t \mapsto t^n e^{-t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $[1,+\infty[$, on en déduit, grâce au critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions continues et positives, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge.

La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 t^n e^{-t}dt$ existe.

On en conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$ converge.

2) a) On remarque que $I_0 = \int_0^{+\infty} t^0 e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.

Pour tout réel A positif, on a : $\int_0^A e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^A = 1 - e^{-A}$.

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \left(1-e^{-A}\right) = 1$, on en conclut :

$$\boxed{I_0 = 1}$$

b) Pour tout réel A positif, examinons $\int_1^A t^{n+1}e^{-t}dt$.

Posons $\begin{cases} u'(t) = e^{-t} \\ u(t) = -e^{-t} \end{cases}$ et $\begin{cases} v(t) = t^{n+1} \\ v'(t) = (n+1)t^n \end{cases}$. Les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0,A]$, on peut intégrer par parties : $\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\,dt = \left[-t^{n+1}e^{-t}\right]_0^A + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}dt$.

On en déduit : $\int_0^A t^{n+1}e^{-t}\,dt = -A^{n+1}e^{-A} + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}dt$.

Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} -A^{n+1}e^{-A} = 0$ et comme les intégrales I_n et I_{n+1} convergent (d'après la question 1), on peut passer à la limite quand A tend vers $+\infty$ et on obtient : $I_{n+1} = (n+1)I_n$.

c) On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $I_n = n!I_0 = n!$.

- On déjà vu, à la question 2.a) : $I_0 = 1 = 0!$. La proposition $R(0)$ est donc vraie.
- Soit n un entier naturel tel que $R(n)$ est vraie.

Grâce à la question 2.b) et à l'hypothèse de récurrence, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)n! = (n+1)!$$

- On conclut, par récurrence, que l'on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!}$$

3) a) On remarque que :

$$f(x,y) = \int_0^{+\infty} (1 + xt + yt^2)^2\, e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (1 + x^2t^2 + y^2t^4 + 2xt + 2yt^2 + 2xyt^3)e^{-t}dt$$

Les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$, $\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$, $\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt$, $\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt$, $\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt$ sont convergentes d'après la première question donc l'intégrale définissant $f(x,y)$ est convergente.
Conclusion : on définit bien une fonction *f* de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant, pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\int_0^{+\infty}(1+xt+yt^2)^2\, e^{-t}dt$$

b) Par linéarité de l'intégration (intégrales convergentes), on obtient :
$f(x,y)=\int_0^{+\infty} e^{-t}dt+x^2\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt+y^2\int_0^{+\infty} t^4e^{-t}dt+2x\int_0^{+\infty} te^{-t}dt+2y\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt+2xy\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt$.
Grâce au résultat de la question 2c), on a enfin :

$$\boxed{f(x,y)=1+2x^2+24y^2+2x+4y+12xy}$$

La fonction *f* est polynomiale donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

c) Les points critiques de *f* sont les couples (x,y) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels : $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}$.

Ce système équivaut à $\begin{cases}4x+12y+2=0\\12x+48y+4=0\end{cases}$, soit encore : $\begin{cases}2x+6y+1=0\\3x+12y+1=0\end{cases}$.
Avec la transformation $L_2\leftarrow 2L_2-3L_1$, on obtient : $\begin{cases}2x+6y+1=0\\6y-1=0\end{cases}$.
Finalement, on a : $\begin{cases}x=-1\\y=\frac{1}{6}\end{cases}$.

$$\boxed{\text{Le seul point critique de } f \text{ est le couple } \left(-1,\frac{1}{6}\right)}$$

d) Les dérivées partielle d'ordre 2 de *f* sont :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=12$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=48$.
Avec les notations de Monge, on a : $r=4$, $s=12$ et $t=48$.
On en déduit : $rt-s^2=4\times 48-12^2=192-144=48>0$, ce qui prouve que *f* admet un extremum local en $\left(-1,\dfrac{1}{6}\right)$. Comme de plus, $r=4>0$, cet extremum est un minimum local.
Le minimum local de *f* sur $\mathbb{R}^2$ est $m=f\left(-1,\frac{1}{6}\right)$. Après calculs, on trouve :

$$\boxed{m=\frac{1}{3}}$$

e) $\left(x+3y+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+9y^2+\dfrac{1}{4}+6xy+x+3y$. En observant l'expression de $f(x,y)$ obtenue à la question 2b), on pense à écrire : $2\left(x+3y+\frac{1}{2}\right)^2=2x^2+18y^2+\dfrac{1}{2}+12xy+2x+6y$.

On a alors : $f(x,y)=2\left(x+3y+\frac{1}{2}\right)^2+6y^2-2y+\dfrac{1}{2}$

On en déduit : $f(x,y)-\dfrac{1}{3}=2\left(x+3y+\frac{1}{2}\right)^2+6y^2-2y+\dfrac{1}{6}=2\left(x+3y+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(y^2-\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{36}\right)$.

On trouve finalement : $f(x,y)-\dfrac{1}{3}=2\left(x+3y+\frac{1}{2}\right)^2+6\left(y-\frac{1}{6}\right)^2$.

On a ainsi la preuve que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)\geq\dfrac{1}{3}$.

La valeur $\dfrac{1}{3}$ est atteinte seulement lorsque $y-\dfrac{1}{6}=0$ et $x+3y+\dfrac{1}{2}=0$ et on retrouve les coordonnées du point critique de f : $x=-1$ et $y=\dfrac{1}{6}$.

Tout ceci prouve que f admet un minimum global en $\left(-1,\dfrac{1}{6}\right)$ et que ce minimum vaut $\dfrac{1}{3}$.

4) a) Par linéarité de l'espérance, on trouve $E\left(Y_{x,y}\right)=1+xE(X)+yE\left(X^2\right)$ et comme $E(X)=1$ et $E\left(X^2\right)=V(X)+\left(E(X)\right)^2=1+1=2$, on obtient : $E\left(Y_{x,y}\right)=1+x+2y$.

b) Grâce au théorème de transfert, on a : $E\left({Y_{x,y}}^2\right)=f(x,y)=1+2x^2+24y^2+2x+4y+12xy$.

On trouve alors : $V\left(Y_{x,y}\right)=E\left({Y_{x,y}}^2\right)-\left(E\left(Y_{x,y}\right)\right)^2=1+2x^2+24y^2+2x+4y+12xy-(1+x+2y)^2$.

En simplifiant, on obtient : $V\left(Y_{x,y}\right)=x^2+20y^2+8xy$.

c) En écrivant $V\left(Y_{x,y}\right)=(x+4y)^2+4y^2$, on a immédiatement $V\left(Y_{x,y}\right)$ minimale si et seulement si $\begin{cases}y=0\\x+4y=0\end{cases}$, c'est-à-dire si et seulement si : $x=y=0$.

Ceci était prévisible car la variable $Y_{x,y}$, qui est égale à $1+xX+yX^2$, est certaine si $x=y=0$ et dans ce cas sa variance est nulle (ce qui est bien la valeur minimale d'une variance).

Exercice 2

1) a) Pour tout k de $[\![0,N-1]\!]$, on a, par croissance de la fonction $t\mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall t\in\left[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}\right],\ \left(\frac{k}{N}\right)^n\leq t^n\leq\left(\frac{k+1}{N}\right)^n$$

En intégrant ces fonctions continues, bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$\forall k\in[\![0,N-1]\!],\ \left(\frac{k}{N}\right)^n\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}1\,dt\leq\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}t^n dt\leq\left(\frac{k+1}{N}\right)^n\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}1\,dt$$

Finalement, on a :

$$\forall k\in[\![0,N-1]\!],\ \frac{1}{N}\left(\frac{k}{N}\right)^n\leq\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}t^n dt\leq\frac{1}{N}\left(\frac{k+1}{N}\right)^n$$

b) En sommant la partie gauche de cet encadrement pour k allant de 0 à $N-1$, on trouve :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n\leq\sum_{k=0}^{N-1}\int_{\frac{k}{N}}^{\frac{k+1}{N}}t^n dt$$

La relation de Chasles permet de conclure :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \leq \int_0^1 t^n dt$$

On a bien :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n \leq \frac{1}{n+1}$$

2) a) Comme Y est à valeurs entières, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y=k)=P(Y>k-1)-P(Y>k)$.
On obtient, en multipliant par *k* et en sommant pour *k* allant de 1 à N :

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{N} kP(Y=k)=\sum_{k=1}^{N} k\big(P(Y>k-1)-P(Y>k)\big)=\sum_{k=1}^{N} k\,P(Y>k-1)-\sum_{k=1}^{N} k\,P(Y>k)$$

Avec un glissement d'indice, il vient : $E(Y)=\sum_{k=0}^{N-1}(k+1)P(Y>k)-\sum_{k=1}^{N} k\,P(Y>k)$.

On a donc : $E(Y)=\sum_{k=0}^{N-1} k\,P(Y>k)+\sum_{k=0}^{N-1} P(Y>k)-\sum_{k=1}^{N} k\,P(Y>k)$.

Après un télescopage, on obtient : $E(Y)=\sum_{k=0}^{N-1} P(Y>k)-NP(Y>N)$.

Comme $P(Y>N)=0$, on trouve :

$$E(Y)=\sum_{k=0}^{N-1} P(Y>k)$$

b) De même, on a :

$$E\big(Y(Y-1)\big)=\sum_{k=1}^{N} k(k-1)P(Y=k)=\sum_{k=1}^{N} k(k-1)P(Y>k-1)-\sum_{k=1}^{N} k(k-1)P(Y>k)$$

Avec un glissement d'indice, il vient :

$$E\big(Y(Y-1)\big)=\sum_{k=0}^{N-1} k(k+1)P(Y>k)-\sum_{k=1}^{N} k(k-1)P(Y>k)$$

On a donc : $E\big(Y(Y-1)\big)=\sum_{k=0}^{N-1} k^2\,P(Y>k)+2\sum_{k=0}^{N-1} k\,P(Y>k)+NP(Y>N)-\sum_{k=1}^{N} k^2\,P(Y>k)$.

Après un télescopage, on obtient : $E\big(Y(Y-1)\big)=\sum_{k=0}^{N-1} k\,P(Y>k)+NP(Y>N)-N^2\,P(Y>N)$.

Comme $P(Y>N)=0$, on trouve :

$$E\big(Y(Y-1)\big)=2\sum_{k=0}^{N-1} kP(Y>k)$$

3) a) Par linéarité de l'espérance, on trouve : $E(M_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$.

Comme chacune des variables X_i sui la loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$, on obtient :

$$E(M_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2}$$

En posant $M_n'=2M_n-1$, on a : $E(M_n')=2E(M_n)-1=N$.

M_n' est un estimateur sans biais de N

b) On a, par indépendance des variables X_i (les tirages sont avec remise) :

$$V(M_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{N^2-1}{12}=\frac{N^2-1}{12n}$$

Comme $M_n'=2M_n-1$, on a : $V(M_n')=4V(M_n)=\dfrac{N^2-1}{3n}$

On sait que M_n' est un estimateur sans biais de N donc, en notant $r_{M_n'}(N)$ le risque quadratique de M_n', on a : $r_{M_n'}(N)=V(M_n')$.

On a donc : $r_{M_n'}(N)=\dfrac{N^2-1}{3n}$.

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} r_{M_n'}(N)=\lim_{n\to+\infty}\frac{N^2-1}{3n}=0$$

4) a) Comme $Z_n=\text{Max}(X_1,...,X_n)$, on a $Z_n(\Omega)=[\![1,N]\!]$ et, en notant F_n la fonction de répartition de Z_n, on a : $\forall k\in[\![1,N]\!]$, $F_n(k)=P(Z_n\le k)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i\le k]\right)$.

Par indépendance des X_i, on obtient : $\forall k\in[\![1,N]\!]$, $F_n(k)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le k)=\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

b) On déduit de la question précédente : $P(Z_n>k)=1-\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

D'après la deuxième question, on en déduit : $E(Z_n)=\sum_{k=0}^{N-1}P(Z_n>k)=N-\sum_{k=0}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$.

On peut alors écrire : $E(Z_n)=N\left(1-\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^n\right)$.

D'après la première question, on a $\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^n\le\dfrac{1}{n+1}$, d'où : $E(Z_n)\ge N\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$.

On a donc : $E(Z_n)\ge N-\dfrac{N}{n+1}$.

Comme $Z_n(\Omega)=[\![1,N]\!]$, on sait que $E(Z_n)\le N$, ce qui donne l'encadrement :

$$N-\frac{N}{n+1}\le E(Z_n)\le N$$

Par encadrement on obtient : $\lim_{n\to+\infty}E(Z_n)=N$.

En conclusion, Z_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de *N*.

c) D'après la deuxième question :

$$E\big(Z_n(Z_n-1)\big)=2\sum_{k=0}^{N-1}kP(Z_n>k)=2\sum_{k=0}^{N-1}k\left(1-\left(\frac{k}{N}\right)^n\right)=2\sum_{k=0}^{N-1}k-2\sum_{k=0}^{N-1}k\left(\frac{k}{N}\right)^n$$

On peut alors écrire : $E\big(Z_n(Z_n-1)\big)=N(N-1)-2N^2\times\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\dfrac{k}{N}\right)^{n+1}$

Toujours d'après la première question, on a $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$ donc :

$E\left(Z_n\left(Z_n-1\right)\right) \geq N(N-1)-\frac{2N^2}{n+2}$

Comme plus haut, on sait que $E\left(Z_n\left(Z_n-1\right)\right) \leq N(N-1)$ d'où l'encadrement :

$$N(N-1)-\frac{2N^2}{n+2} \leq E\left(Z_n\left(Z_n-1\right)\right) \leq N(N-1)$$

On en déduit (par encadrement) : $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(Z_n\left(Z_n-1\right)\right)=N(N-1)$

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(E\left(Z_n^2\right)-E\left(Z_n\right)\right)=N(N-1)$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} E\left(Z_n\right)=N$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} E\left(Z_n^2\right)=N^2$$

Finalement, comme $V\left(Z_n\right)=E\left(Z_n^2\right)-\left(E\left(Z_n\right)\right)^2$, on trouve : $\lim\limits_{n\to+\infty} V\left(Z_n\right)=0$.

Comme le biais de Z_n tend vers 0, on en déduit que le risque quadratique de Z_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

1) a) 1 est la seule valeur propre de A et le sous-espace propre est engendré par $u_1=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$.

b) Il n'y a qu'un sous-espace propre de dimension 1 et A est une matrice de taille 2 donc A n'est pas diagonalisable.

2) a) On trouve $u_2=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

b) On trouve : $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

c) $P=\begin{pmatrix}-4&-1\\1&0\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-4\end{pmatrix}$

3) a) On a assez rapidement : $C'(x)=AC(x)$

b) On a de même : $D'(x)=TD(x)$

4) a) Comme $D(x)=P^{-1}C(x)$, on a : $\begin{pmatrix}h(x)\\k(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(x)\\g(x)\end{pmatrix}$. On obtient donc :

$h(x)=g(x)$ et $k(x)=-f(x)-4g(x)$.

Comme $f(0)=g(0)=1$, on trouve : $h(0)=1$ et $k(0)=-5$.

De plus, on a $D'(x)=TD(x)$, ce qui s'écrit : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\begin{cases}h'(x)=h(x)+k(x)\\k'(x)=k(x)\end{cases}$.

b) La fonction y est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $y'(x)=\left(k'(x)-k(x)\right)e^{-x}$.

D'après la question précédente, on obtient : $\forall x\in\mathbb{R}$, $y'(x)=0$.

Ainsi, la fonction y est constante sur $\mathbb{R}$ et il existe un réel M tel que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $y(x)=M$.

En remplaçant $y(x)$ par son expression, on trouve : $k(x)=M\,e^x$

On a vu que $k(0)=-5$, ce qui prouve que $M=-5$ et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ k(x)=-5e^{x}$$

c) La fonction *z* est, elle aussi, dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $z'(x)=(x+1)e^{x}=z(x)+e^{x}$.
On a alors :
$\forall x\in\mathbb{R},\ (h+5z)'(x)=h'(x)+5z'(x)=h(x)+k(x)+5z(x)+5e^{x}$ (d'après la question précédente).
En remplaçant $k(x)$ par $-5e^{x}$, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (h+5z)'(x)=h(x)+5z(x)=(h+5z)(x)$$

d) En appliquant à $h+5z$ la même technique que celle de la question **4b)**, on trouve qu'il existe un réel N tel que : $\forall x\in\mathbb{R},\ (h+5z)(x)=Ne^{x}$.
Comme $z(x)=xe^{x}$, on a donc : $h(x)=(-5x+N)e^{x}$.
On a vu que $h(0)=1$, ce qui prouve que $N=1$, et on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=(-5x+1)e^{x}$$

e) Pour résumer, on a, pour tout réel x : $h(x)=(-5x+1)e^{x}$ et $k(x)=-5e^{x}$.
Comme $h(x)=g(x)$ et $k(x)=-f(x)-4g(x)$, on trouve : $g(x)=h(x)$ et $f(x)=-k(x)-4h(x)$.
En conclusion :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(20x+1)e^{x}\ \text{ et }\ g(x)=(-5x+1)e^{x}$$

5) On vérifie par dérivation que les fonctions *f* et *g* trouvées ci-dessus vérifient bien :

$$\begin{cases} f'(x)=5f(x)+16g(x)\\ g'(x)=-f(x)-3g(x)\end{cases}$$

Les solutions du système (S) sont donc les fonctions *f* et *g* définies par :

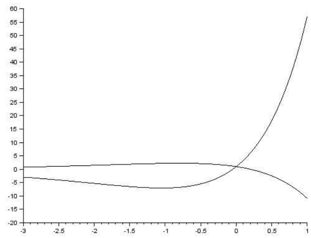
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=(20x+1)e^{x}\ \text{ et }\ g(x)=(-5x+1)e^{x}$$

6) On calcule les dérivées de *f* et *g* : $f'(x)=(20x+21)e^{x}$ et $g'(x)=(-5x-4)e^{x}$.
$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 20x+21\geq\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{21}{20}$ et $g'(x)\geq 0\Leftrightarrow -5x-4\geq 0\Leftrightarrow x\leq -\dfrac{4}{5}$
On a donc les tableaux de variation suivants (les limites sont simples) :

x	$-\infty$		$-\ 21/20$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$m<0$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$-4/5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$M>0$	$\searrow$	$-\infty$

Voici les courbes :



ADMISSION SUR TITRES EN PREMIERE ANNEE

RAPPORT DE CORRECTION 2014 :

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, longue comme d'habitude, et peut-être un peu moins difficile que l'année dernière, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse, probabilités et statistiques. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif tout en respectant scrupuleusement le programme.

• L'exercice 1 proposait l'étude d'une fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y)=\int_0^{+\infty}(1+xt+yt^2)^2\,e^{-t}\,dt$$

L'objectif était de trouver la valeur minimale de la variance de la variable aléatoire $Y_{x,y}=1+xX+yX^2$, où X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

• L'exercice 2 avait pour but l'estimation ponctuelle du paramètre N égal au nombre de boules présentes dans une urne contenant les boules de numéros 1, 2, …, N.

L'énoncé proposait deux estimateurs, la moyenne empirique $M_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, ainsi que $Z_n=\text{Max}(X_1,\dots,X_n)$, où X_i est égale au numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ème}}$ tirage lors de tirages d'une boule avec remise dans l'urne.

• L'exercice 3 portant sur le programme d'algèbre linéaire et d'analyse, avait pour objectif d'étudier le système différentiel linéaire d'ordre 1 d'inconnues f et g.

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \begin{cases} f'(x)=5f(x)+16g(x)\\ g'(x)=-f(x)-3g(x)\end{cases}$$

La suite de l'exercice consistait en l'étude des fonctions solutions et le tracé de leur représentation graphique.

Moyenne.
Pour les 600 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,86 sur 20 pour un écart-type d'environ 5,75, la médiane étant, quant à elle, égale à 10,7.
87 candidats, soit 14,5% des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4.
95 candidats, soit 15,8% des candidats, obtiennent une note supérieure à 18.

Analyse des copies.
Les correcteurs notent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, comme d'habitude, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats. La moyenne, est très légèrement en dessous de celle de l'année dernière car encore plus de candidats que par le passé ont des notes extrêmement basses, semblent très mal préparés (ils alignent des "démonstrations" ineptes, voire délirantes) et semblent avoir fait des impasses, certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve. En revanche, il y a plus de très bonnes notes que l'année dernière, ce qui pourrait être dû au côté moins conceptuel du sujet (notamment du problème qui n'a pas été trop repoussant).
En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants :

Exercice 1

- Le fait que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n e^{-t} = 0$ ne garantit pas la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, dt$.

En ce qui concerne l'intégrale précédente de trop nombreux candidats traitent un problème imaginaire en 0, comme si toutes les intégrales avaient des problèmes en leurs bornes.

Beaucoup confondent $\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, dt$ et $\int_0^{x} t^n\, e^{-t}\, dt$, certains se sont même égarés à écrire :

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1}\, e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} t\, dt \int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, dt$$

- Le critère de négligeabilité n'est pas maîtrisé par tout le monde, loin de là !
- Les intégrales $\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t}\, dt$ posent problème à de nombreux candidats, alors qu'elles devraient faire partie de leur culture.
- Dire que l'on pourrait faire une récurrence n'est pas crédible : il faut la faire (même si elle semble très facile) ! Et ceci, d'autant plus que des candidats, ayant obtenu $I_{n+1} = (n+1) I_n$, ce qui est correct, concluent que la suite (I_n) est géométrique de raison $n+1$.
- Certains candidats pensent que si une fonction de deux variables n'a qu'un point critique, ce point est un extremum (et même un minimum !).
- D'autres croient que si les dérivées partielles d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ sont strictement positives, alors la fonction présente un minimum local en son point critique.

Exercice 2

- Les correcteurs constatent de nombreuses tricheries dans cet exercice (questions 1a, 2a et 2b).
- Beaucoup de difficultés (ce à quoi les correcteurs ne s'attendaient pas) pour reconnaître la loi commune aux variables X_i : toutes les lois classiques ont été passées en revue ! Pour ceux qui avaient trouvé le modèle "uniforme", certains ont confondu la loi uniforme discrète sur $[\![1,N]\!]$ avec celle à densité sur $[1,N]$.
- Il ne suffit pas d'affirmer qu'une somme se simplifie par télescopage, sans le faire visualiser au correcteur (d'autant plus que, dans le cas présent, ce n'était pas du tout évident).À ce sujet, beaucoup de candidats trichent en écrivant $E(Y) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} k\, P(Y=k)$ au lieu de $E(Y) = \sum\limits_{k=1}^{N} k\, P(Y=k)$.
- Rappelons qu'un estimateur ne peut pas dépendre de la "chose" estimée.
- Trop souvent, la seule inégalité $E(Z_n) \geq N - \frac{N}{n+1}$ suffisait à des candidats peu scrupuleux pour conclure $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n) = N$.

Exercice 3

- Quelques candidats pensent que si une matrice d'ordre 2 na pas deux valeurs propres, elle ne peut pas être diagonalisable.
- Les notions de polynôme caractéristique et de polynôme minimal ne sont pas au programme et on comprend pourquoi quand on voit l'utilisation qui en est faite par de nombreux candidats !
- Il est insupportable de lire qu'un sous-espace propre est $(-4,1)$.
- Trop de candidats semblent ignorer ce qu'est une matrice de passage, certains concluant par la suite qu'il devait y avoir une erreur d'énoncé !
- Rappelons que le rang dune matrice n'est pas son format.
- Les équations différentielles ne sont pas au programme, les correcteurs n'ont donc pas validé les résultats supposés "connus" à ce sujet.

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.

Pour terminer, les correcteurs ont eu souvent l'impression d'avoir affaire à des candidats ayant des têtes très remplies (souvent avec des concepts, soit peu recommandables, soit hors programme et mal maîtrisés), mais pas des têtes réellement pensantes.