CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2012

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte : 3 exercices

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

A l'issue de chaque composition écrite, tout candidat est tenu sous peine d'élimination, de remettre au surveillant une copie (même blanche, qui sera alors signée). La seule responsabilité du candidat est engagée dans le cas contraire. Tout candidat sortant avant la fin des épreuves doit obligatoirement remettre le sujet en même temps que sa copie.

Exercice 1

On rappelle qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x, on pose : $A_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x}{n} \\ \frac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général $\left(A_n(x)\right)^n$, puis d'étudier la matrice limite.

1) a) Justifier qu'il existe une matrice diagonale $D_n(x)$ et une matrice inversible P (indépendante de x ainsi que de n) vérifiant : $A_n(x) = P\, D_n(x)\, P^{-1}$.

b) Déterminer la matrice P^{-1}, puis en déduire explicitement $\left(A_n(x)\right)^n$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - \frac{x}{n})^n$.

b) Déterminer explicitement la matrice $R(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(A_n(x)\right)^n$.

3) a) Montrer que $R(x)$ est diagonalisable.

b) Déterminer valeurs propres et sous-espaces propres de $R(x)$.

4) a) Expliciter, pour tout couple (x, y) de réels, la matrice $R(x)\,R(y)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $R(x)^n = R(nx)$.

c) En déduire également que $R(x)$ est inversible et donner la matrice inverse de $R(x)$.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire de Bernoulli X de paramètre p ($0 < p < 1$) inconnu et un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de la loi de X. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $F_n = \frac{S_n}{n}$.

On souhaite estimer p en donnant un intervalle de confiance.

1) a) Donner la loi de S_n ainsi que son espérance et sa variance.

b) Montrer que F_n est un estimateur sans biais de p. Donner son risque quadratique.

2) On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on note t le réel tel que $\Phi(t) = 0{,}975$.

a) Justifier que, pour n assez grand, on peut approcher la loi de $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par la loi normale centrée réduite.

b) En utilisant cette approximation, montrer que : $P(-t \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le t) = 2\Phi(t) - 1$.

c) En déduire : $P(F_n - \frac{t\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le p \le F_n + \frac{t\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}) = 0{,}95$.

3) a) Montrer que : $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$.

b) On admet que $t = 1{,}96$. Établir que : $P\left(F_n - \dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \dfrac{0{,}98}{\sqrt{n}} \right) \geq 0{,}95$.

4) Lors d'élections, deux sondages sont effectués, chacun par un institut, et indépendamment l'un de l'autre.
Le premier sondage est effectué auprès de 625 personnes : 325 d'entre elles déclarent vouloir voter pour le président sortant.
Le deuxième sondage est effectué auprès de 400 autres personnes : 180 d'entre elles déclarent vouloir voter pour le président sortant.
On note p la proportion théorique d'électeurs souhaitant reconduire le président sortant.

a) Utiliser la première partie pour déterminer un intervalle de confiance pour p au risque 5% en utilisant le premier sondage.

b) Déterminer de même un intervalle de confiance pour p au risque 5% en utilisant le deuxième sondage.

Exercice 3

Partie 1 : préliminaire.

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1) a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0,x]$, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

c) Établir par encadrement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

d) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2) a) Vérifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \dfrac{x^{n+1}}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

b) En déduire que la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$$

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p (avec $0 < p < 1$). On pose $q = 1-p$.
On considère également la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombre réels positifs définie par :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

On considère dès lors une variable aléatoire N, définie elle aussi sur (Ω, $\mathcal{A}$, P), que l'on suppose indépendante des variables X_i, et dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

On pose alors $Z = \text{Sup}(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_N)$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Z_n = \text{Sup}(X_0, X_1, X_2, ..., X_n)$.
On admet que Z et Z_n sont des variables aléatoires, définies aussi sur (Ω, $\mathcal{A}$, P).

2) Étude de Z_n.
   a) Montrer que, pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $P(X_i \leq k) = 1 - q^k$.
   b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z_n \leq k) = (1 - q^k)^{n+1}$.

3) Étude de Z.
   a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z \leq k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-q^k)^{n+1}}{n(n+1)}$$
   b) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $P(Z \leq k)$ explicitement en fonction de k.
   c) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1)$,
   d) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $P(Z = k)$ explicitement en fonction de k.

4) Existence des espérances de N et de Z.
   a) Vérifier que la variable aléatoire N ne possède pas d'espérance.
   b) Montrer que, pourtant, Z possède une espérance et la calculer.

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2012

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

CORRIGE

Exercice 1

1) a) • Si $x = 0$, la matrice $A_n(0)$ est la matrice identité donc elle est diagonalisable, avec $D_n = I$ et n'importe quelle matrice P inversible et indépendante de x et de n).

• Si $x \neq 0$, alors pour tout réel λ, on a $A_n(x) - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{x}{n} \\ \frac{x}{n} & 1-\lambda \end{pmatrix}$ et cette matrice n'est pas inversible si et seulement si : $(1-\lambda)^2 - \frac{x^2}{n^2} = 0$. Les valeurs propres de $A_n(x)$ sont donc les solutions de l'équation ci-dessus et on trouve que $A_n(x)$ a deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 1 + \frac{x}{n}$ et $\lambda_2 = 1 - \frac{x}{n}$, ce qui confirme que $A_n(x)$ est diagonalisable.

On cherche les sous-espaces propres respectivement associés, que l'on va noter E_1 et E_2, en résolvant $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{x}{n} \\ \frac{x}{n} & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour chaque valeur propre.

Pour la valeur propre λ_1, on obtient $\begin{pmatrix} -\frac{x}{n} & \frac{x}{n} \\ \frac{x}{n} & -\frac{x}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit (comme $x \neq 0$) : $-a + b = 0$.

On a donc : $E_1 = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Pour la valeur propre λ_2, on obtient $\begin{pmatrix} \frac{x}{n} & \frac{x}{n} \\ \frac{x}{n} & \frac{x}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit (comme $x \neq 0$) : $a + b = 0$.

On a donc : $E_2 = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

En conclusion, il existe une matrice diagonale $D_n(x) = \begin{pmatrix} 1+\frac{x}{n} & 0 \\ 0 & 1-\frac{x}{n} \end{pmatrix}$ et une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (qui est bien indépendante de x et de n) vérifiant :

$$\boxed{A_n(x) = P\, D_n(x)\, P^{-1}}$$

Remarque : cette égalité est valable pour $x = 0$ (elle donne $I = P\, I\, P^{-1}$).

b) Avec la méthode du pivot de Gauss, on trouve :

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}P}$$

On montre par récurrence sur k que , pour tout entier naturel k, on a :

$$\left(A_n(x)\right)^k = P\,D_n(x)^k\,P^{-1}$$

Pour $k=0$: $P\,D_n(x)^0\,P^{-1} = P\,I\,P^{-1} = P\,P^{-1} = I = \left(A_n(x)\right)^0$.

Si l'on suppose pour un entier naturel k fixé que $\left(A_n(x)\right)^k = P\,D_n(x)^k\,P^{-1}$, alors on a :

$\left(A_n(x)\right)^{k+1} = \left(A_n(x)\right)^k A_n(x) = P\,D_n(x)^k\,P^{-1}P\,D_n(x)P^{-1} = P\,D_n(x)^k\,D_n(x)P^{-1} = P\,D_n(x)^{k+1}\,P^{-1}$L
a récurrence est terminée.

En particulier, on a pour $k=n$:

$$\left(A_n(x)\right)^n = P\,D_n(x)^n\,P^{-1}$$

En remplaçant, on obtient :

$$\left(A_n(x)\right)^n = P\,D_n(x)^n\,P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n & 0\\ 0 & \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\left(A_n(x)\right)^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n & \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\\ \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & -\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\end{pmatrix}$$

Finalement :

$$\boxed{\left(A_n(x)\right)^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \left(1+\frac{x}{n}\right)^n+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\end{pmatrix}}$$

2) a) Pour tout entier naturel n assez grand, $1+\dfrac{x}{n}$ est strictement positif et on a :

$\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1+\tfrac{x}{n})\right)$. Lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on a : $\ln(1+\tfrac{x}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{x}{n}$, ce qui implique : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\tfrac{x}{n}) = x$. Par continuité de la fonction exponentielle en tout réel x, on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x}$$

Pour tout entier naturel n assez grand, on a $1-\dfrac{x}{n}$ qui est strictement positif et on trouve de même :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}}$$

b) On a : $\left(A_n(x)\right)^n=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\\ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \left(1+\frac{x}{n}\right)^n+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\end{pmatrix}$

Tout les éléments de cette matrice ont une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et, après passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{R(x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^x+e^{-x} & e^x-e^{-x}\\ e^x-e^{-x} & e^x+e^{-x}\end{pmatrix}}$$

3) a) La matrice $R(x)$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

b) • Si $x = 0$, la matrice $R(0)$ est la matrice identité : 1 est sa seule valeur propre et $M_{2,1}(\mathbb{R})$ est le sous-espace propre associé

• Si $x \neq 0$, les valeurs propres de $R(x)$ sont les réels λ pour lesquels la matrice $R(x)-\lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire les réels λ solutions de :

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\lambda\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=0$$

On trouve deux valeurs propres distinctes (car $x \neq 0$): $\lambda_1=e^x$ et $\lambda_2=e^{-x}$.

Les sous-espaces propres respectivement associés, notés F_1 et F_2, s'obtiennent en résolvant $\left(R(x)-\lambda I\right)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ pour chaque valeur propre λ.

Pour la valeur propre λ_1, ceci s'écrit : $\begin{pmatrix}-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\\ \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} & -\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Comme x est différent de 0, on a $e^x-e^{-x}\neq 0$ et on trouve : $-a+b=0$.

On a donc :

$$\boxed{F_1=\text{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=E_1}$$

Pour la valeur propre λ_2, ceci s'écrit : $\begin{pmatrix} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme x est différent de 0, on a $e^x - e^{-x} \neq 0$ et on trouve : $a + b = 0$.
On a donc :

$$\boxed{F_2 = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = E_2}$$

4) a) $R(x)\,R(y) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} e^x + e^{-x} & e^x - e^{-x} \\ e^x - e^{-x} & e^x + e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^y + e^{-y} & e^y - e^{-y} \\ e^y - e^{-y} & e^y + e^{-y} \end{pmatrix}$

Après calcul, on trouve : $R(x)\,R(y) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\left(e^x e^y + e^{-x}e^{-y}\right) & 2\left(e^x e^y - e^{-x}e^{-y}\right) \\ 2\left(e^x e^y - e^{-x}e^{-y}\right) & 2\left(e^x e^y + e^{-x}e^{-y}\right) \end{pmatrix}$

On a donc : $R(x)\,R(y) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{x+y} + e^{-(x+y)} & e^{x+y} - e^{-(x+y)} \\ e^{x+y} - e^{-(x+y)} & e^{x+y} + e^{-(x+y)} \end{pmatrix}$.

Finalement :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ R(x)\,R(y) = R(x+y)}$$

b) Par récurrence. Pour $n = 0$, on a : $R(x)^0 = I$ et $R(0\,x) = R(0) = I$, ce qui initialise la récurrence.
Supposons, pour un entier naturel n fixé, que : $R(x)^n = R(n\,x)$. On a alors :
$R(x)^{n+1} = R(x)^n\,R(x) = R(n\,x)R(x) = R((n+1)\,x)$, la dernière égalité provenant du résultat de la question 4a).
Par récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ R(x)^n = R(n\,x)}$$

c) On sait que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ R(x)\,R(y) = R(x+y)$ et que $R(0) = I$. On a donc, en prenant $y = -x$: $R(x)\,R(-x) = I$. Ceci prouve que $R(x)$ est inversible et que :

$$\boxed{\left(R(x)\right)^{-1} = R(-x)}$$

Exercice 2

1) a) La variable aléatoire S_n est la somme de n variables de Bernoulli, indépendantes et de même paramètre p, donc :

$$\boxed{S_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n, p)}$$

On en déduit immédiatement :

$$\boxed{E(S_n) = np \text{ et } V(S_n) = np(1-p)}$$

b) On sait que $E(aX+b)=aE(X)+b$.

Comme $F_n=\dfrac{S_n}{n}$, on en déduit : $E(F_n)=\dfrac{1}{n}E(S_n)=p$.

$$\boxed{F_n \text{ est un estimateur sans biais de } p}$$

On sait aussi que $V(aX+b)=a^2V(X)$.

On a ainsi $V(F_n)=\dfrac{1}{n^2}V(S_n)=\dfrac{p(1-p)}{n}$, et comme F_n est sans biais, on sait que son risque quadratique $r_{S_n}(p)$ est égal à sa variance. On a donc :

$$\boxed{r_{S_n}(p)=\frac{p(1-p)}{n}}$$

2) a) La variable aléatoire S_n est la somme de n variables indépendantes, de même loi, et ayant une espérance et une variance. On peut donc appliquer le théorème de la limite centrée à la variable S_n, ce qui assure que $\dfrac{S_n-E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Comme $E(S_n)=np$ et $V(S_n)=np(1-p)$, on a donc : $\dfrac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Ainsi, pour des valeurs assez grandes de n, on peut approcher la loi de $\dfrac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par la loi normale centrée réduite.

b) Pour des valeurs assez grandes de n, on peut donc considérer que :

$P\left(-t\leq \dfrac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq t\right) = \Phi(t)-\Phi(-t)=\Phi(t)-\big(1-\Phi(t)\big)$.

On a bien (toujours pour n assez grand) :

$$\boxed{P\left(-t\leq \frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq t\right)=2\Phi(t)-1}$$

c) On a $\dfrac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\dfrac{\frac{1}{n}\big(S_n-np\big)}{\frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)}}=\dfrac{F_n-p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}$.

Par conséquent, l'égalité obtenue à la question 2b) s'écrit : $P\left(-t\leq \dfrac{F_n-p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}\leq t\right)=2\Phi(t)-1$.

En arrangeant, on trouve : $P\left(-t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leq F_n-p\leq t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(t)-1$.

On en déduit : $P\left(-t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p - F_n \leq t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) - 1$.

On a ainsi : $P\left(F_n - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) - 1$

Comme Φ(t) = 0,975, on a $2\Phi(t)-1$ = 0,95 et on obtient bien :

$$\boxed{P\left(F_n - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = 0,95}$$

3) a) On étudie la fonction h : $p \mapsto p(1-p)$ sur $[0,1]$. Cette fonction (polynomiale) est dérivable et on a : $h'(p) = 1-2p$, quantité qui est positive si et seulement si $p \leq \frac{1}{2}$. La fonction h croît sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et décroît sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$, ce qui prouve qu'el a un maximum global en $\frac{1}{2}$ et ce maximum vaut : $h(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Conclusion :

$$\boxed{\forall p \in [0,1],\ p(1-p) \leq \frac{1}{4}}$$

b) D'après la majoration précédente, l'événement $\left(F_n - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$ est inclus dans l'événement $\left(F_n - \frac{t}{2\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$.

Comme t = 1,96, on obtient : $\left(F_n - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \subset \left(F_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right)$.

On en déduit, par croissance de la probabilité :

$P\left(F_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right) \geq P\left(F_n - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$.

Finalement, avec le résultat de la question 2c), on trouve bien :

$$\boxed{P\left(F_n - \frac{0,98}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{0,98}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,95}$$

4) Remarquons que, avec n = 625 et n = 400, nous sommes bien dans les conditions d'approximation établies à la question 2a), ces conditions étant correctes dès que $n \geq 30$.

a) Les données du premier sondage donnent $n = 625$ et $F_{625} = \frac{325}{625} = \frac{13}{25}$ donc on obtient :

$P\left(\frac{13}{25} - \frac{0,98}{25} \leq p \leq \frac{13}{25} + \frac{0,98}{25}\right) \geq 0,95$, soit : $P\left(0,4808 \leq p \leq 0,5592\right) \geq 0,95$.

Avec les données du premier sondage, un intervalle de confiance pour p au risque 5% est donc : $[0,4808\ ;\ 0,5592]$.

b) Les données du deuxième sondage donnent $n = 400$ et $F_{400} = \frac{180}{400} = \frac{9}{20}$ donc on a :

$P\left(\frac{9}{20} - \frac{0,98}{20} \leq p \leq \frac{9}{20} + \frac{0,98}{20}\right) \geq 0,95$, soit : $P\left(0,401 \leq p \leq 0,499\right) \geq 0,95$.

Avec les données du deuxième sondage, un intervalle de confiance pour p au risque 5% est donc : $\left[0,401\ ;\ 0,499\right]$.

Problème

Partie 1 préliminaire.

1) a) Comme x appartient à $[0,1[$, alors, pour tout t de $[0,x]$, on a $t \neq 1$, d'où :

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} t^{p-1} = \sum_{q=0}^{n-1} t^{q} = \frac{1-t^{n}}{1-t}}$$

b) En intégrant entre 0 et x (les fonctions sont continues sur $[0,x]$), on obtient, par linéarité de l'intégration : $\int_0^x \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$, puis, toujours par linéarité de l'intégration : $\sum_{p=1}^{n} \int_0^x t^{p-1}dt = -\ln\left|1-x\right| - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt$, ce qui s'écrit (comme $x<1$) :

$$\boxed{\forall x \in [\,0,1\,[,\ \sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt}$$

c) $\forall t \in [0,x]$, $\frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{1-t} \geq 1$. En multipliant les trois membres par $t^n \geq 0$ et en intégrant entre 0 et x (bornes dans l'ordre croissant), on trouve : $\frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt \geq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \geq \int_0^x t^n dt$,

ce qui s'écrit : $\frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1} \geq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \geq \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et, comme $x \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$.

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que :

$$\boxed{\forall x \in [\,0,1\,[,\ \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt = 0}$$

d) D'après l'égalité obtenue à la question 1b), on est sûr que $\sum_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p}$ a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la série de terme général $\frac{x^p}{p}$ est convergente, avec, de plus, après passage à la limite :

$$\boxed{\forall x \in [\,0,1\,[,\ \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)}$$

2) a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)}$. On en déduit :

$$\boxed{\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = \frac{x^{n+1}}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

b) On peut écrire $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, et comme d'après la question 1d), les séries de termes généraux $\dfrac{x^n}{n}$ et $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ convergent, la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ converge également (comme combinaison linéaire de séries convergentes). On a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la première question et on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = -x\ \ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x) = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [\,0, 1\,[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)}$$

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

1) Pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 1, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

Comme $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{N+1}\right) = 1$, on en conclut que la série de terme général u_n converge et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1}$$

2) a) Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X_i \leq k) = \sum_{j=1}^{k} P(X_i = j) = \sum_{j=1}^{k} q^{j-1}p = p\sum_{l=0}^{k-1} q^l.$$

Comme $1-p$ est différent de 1, on en déduit : $P(X_i \leq k) = p \times \dfrac{1-q^k}{1-q}$.

En simplifiant par p, on a bien :

$$\boxed{P(X_i \leq k) = 1 - q^k}$$

b) Comme Z_n = Sup (X_0, X_1, X_2, ..., X_n), on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(Z_n \le k) = \bigcap_{i=0}^{n}(X_i \le k)$. En effet, dire que la valeur prise par la plus grande des variables X_0, X_1, X_2, ..., X_n (c'est-à-dire prise par Z_n) est inférieure ou égale à k, c'est dire que chacune des variables X_0, X_1, X_2, ..., X_n a pris une valeur inférieure ou égale à k.

Par indépendance des variables X_i, on obtient : $P(Z_n \le k) = \prod_{i=0}^{n} P(X_i \le k)$.

Les variables X_i suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, on déduit de la question précédente que : $P(Z_n \le k) = \prod_{i=0}^{n}(1-q^k)$.

Pour finir, on trouve bien :

$$\boxed{P(Z_n \le k) = (1-q^k)^{n+1}}$$

3) a) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{\ (N=n),\ n \in \mathbb{N}^*\ \}$ s'écrit : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z \le k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Z \le k] \cap [N=n]\big)$.

En remplaçant Z par son expression, on trouve :

$$P(Z \le k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([\mathrm{Sup}(X_0,...,X_N) \le k] \cap [N=n]\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([\mathrm{Sup}(X_0,...,X_n) \le k] \cap [N=n]\big).$$

$$P(Z \le k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P\big([Z_n \le k] \cap [N=n]\big).$$

Comme N est indépendante de X_0, X_1, X_2, ..., X_n, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z \le k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z_n \le k)\, P(N=n)}$$

On connaît la loi de Z_n ainsi que celle de N, et en remplaçant, on trouve :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z \le k) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-q^k)^{n+1} \frac{1}{n(n+1)}}$$

b) On sait, grâce au préliminaire, que : $\forall x \in [\,0, 1\,[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Ici, comme p appartient à $]\,0, 1\,[$, on est certain que q appartient aussi à $]\,0, 1\,[$ et il en est de même pour q^k. Par conséquent, $1-q^k$ appartient à $]\,0, 1\,[$ et on peut appliquer le résultat ci-dessus en remplaçant x par $1-q^k$. On obtient : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(Z \le k) = 1-q^k + q^k \ln(q^k)$.

En arrangeant un peu, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z \le k) = 1-q^k + k\, q^k \ln q}$$

c) Par définition de l'opérateur "$\leq$", on a : $(Z \leq k) = (Z < k) \cup (Z = k)$.
Par incompatibilité, on obtient : $P(Z \leq k) = P(Z < k) + P(Z = k)$.
Comme Z est à valeurs entières, les événements $(Z < k)$ et $(Z \leq k-1)$ sont égaux donc :
$P(Z \leq k) = P(Z \leq k-1) + P(Z = k)$.
On en déduit :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = P(Z \leq k) - P(Z \leq k-1)}$$

d) Comme la formule donnant $P(Z \leq k)$ obtenue à la question 3b) est valable pour $k = 0$ (elle donne 0 = 0), on peut remplacer $P(Z \leq k)$ et $P(Z \leq k-1)$, ce qui donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = \left(1 - q^k + k\,q^k \ln q\right) - \left(1 - q^{k-1} + (k-1)\,q^{k-1} \ln q\right)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = q^{k-1} - q^k + \left(k\,q^k - (k-1)\,q^{k-1}\right)\ln q$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = q^{k-1}\left(1 - q + (kq - k + 1)\ln q\right)$$

En remplaçant $1-q$ par p, on trouve : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = q^{k-1}\left(p - k\,p \ln q + \ln q\right)$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(Z = k) = \left(p + \ln q\right) q^{k-1} - \left(p \ln q\right) k\, q^{k-1}}$$

4) a) Pour tout entier naturel n non nul, on a : $nP(N = n) = \dfrac{1}{n+1}$. Comme la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ diverge (série de Riemann de paramètre 1), on peut conclure que :

$$\boxed{N \text{ ne possède pas d'espérance}}$$

b) Pour tout entier naturel n non nul, on a : $k\,P(Z = k) = \left(p + \ln q\right) k\, q^{k-1} - \left(p \ln q\right) k^2 q^{k-1}$
En écrivant $k^2 = k(k-1) + k$, on obtient :
$k\,P(Z = k) = \left(p + \ln q - p \ln q\right) k\, q^{k-1} - \left(pq \ln q\right) k(k-1) q^{k-2}$.
Les séries de termes généraux $k\,q^{k-1}$ et $k(k-1)q^{k-2}$ sont absolument convergentes (séries géométriques "dérivées" dont la raison q est strictement comprise entre -1 et 1) donc Z possède une espérance et :

$$E(Z) = \left(p + \ln q - p \ln q\right) \sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} - \left(pq \ln q\right) \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2}.$$

Le premier terme de la deuxième somme est nul, ce qui donne :

$$E(Z) = \left(p + \ln q - p \ln q\right) \sum_{k=1}^{+\infty} k\, q^{k-1} - \left(pq \ln q\right) \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2}.$$

On a donc : $E(Z) = \left(p + \ln q - p \ln q\right) \dfrac{1}{(1-q)^2} - \left(pq \ln q\right) \dfrac{2}{(1-q)^3}$.

Avec $q = 1 - p$, on obtient : $E(Z) = \dfrac{p + \ln q - p \ln q}{p^2} - \dfrac{2q \ln q}{p^2} = \dfrac{p + (1-p)\ln q - 2q \ln q}{p^2}$.

Finalement :

$$\boxed{E(Z) = \frac{p - q \ln q}{p^2}}$$

EDHEC BUSINESS SCHOOL

ADMISSION SUR TITRES EN PREMIERE ANNEE

<u>RAPPORT DE CORRECTION 2012 :</u>

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.
L'épreuve, plus longue et plus difficile que par le passé, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve, une part conséquente étant réservée aux probabilités et aux statistiques. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et sélectif. Ils regrettent, comme par le passé, que nombre de candidats ne soient que très insuffisamment préparés, notamment en probabilités.

• L'exercice 1 proposait l'étude de la limite de la suite de matrices $\left(A_n(x)\right)^n$, où la matrice A_n était définie par :

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x}{n} \\ \dfrac{x}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

• L'exercice 2 avait pour but de déterminer un intervalle de confiance pour une proportion, grâce au théorème de la limite centrée, puis d'en déduire une fourchette, construite sur deux sondages, et permettant d'estimer la proportion d'électeurs souhaitant reconduire le président sortant.

• L'exercice 3 portant sur le programme d'analyse et de probabilités, avait pour objectif d'étudier la loi d'un Sup aléatoire de variables aléatoires indépendantes, et suivant toutes la loi géométrique.
La première partie établissait un résultat utile, à savoir :

$$\forall x \in [0,1[\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$$

La deuxième partie établissait la loi de la variable aléatoire Z définie par :

$$Z = \mathrm{Sup}(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_N)$$

où la loi de la variable aléatoire N était définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

et où les variables X_i, indépendantes, suivaient la loi géométrique de paramètre p (p étant élément de $]0,1[$).

Moyenne.
Pour les 724 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,03 sur 20.

15% des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4.
10% des candidats obtiennent une note supérieure à 18.
35 candidats obtiennent la note maximale.

Analyse des copies.

Les correcteurs constatent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, comme d'habitude, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats. La moyenne, meilleure que l'année dernière, pourrait être due au nombre un peu moins élevé de candidats ayant composé à cette épreuve.

Mis à part, d'un côté quelques très brillants candidats ayant des connaissances bien supérieures à celles exigées par le programme, et de l'autre, un certain nombre de candidats très mal préparés, les correcteurs trouvent l'ensemble d'un niveau très honorable, tout en regrettant que d'assez nombreux candidats semblent s'être "spécialisés" (soit en analyse, soit en algèbre, soit en probabilités), certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve. Rappelons que ces trois "compartiments" du programme de mathématiques sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants :

- On ne peut pas composer les équivalents par la fonction exponentielle. Dans le cas présent, ceci fonctionnait (encore fallait-il le justifier), mais souvent, c'est voué à l'échec : par exemple, $n+1 \underset{+\infty}{\sim} n$, mais cet équivalent n'est pas conservé après composition par la fonction exponentielle.
- Donner un intervalle de confiance sous la forme $\left[\frac{325}{625}-\frac{0,98}{\sqrt{625}}, \frac{325}{625}+\frac{0,98}{\sqrt{625}}\right]$ est peu correct vis-à-vis de la personne qui a commandé le sondage !
- La formule des probabilités totales est méconnue d'un trop grand nombre de candidats, de même que la notion de système complet d'événements.
- Plus généralement, faire les calculs au brouillon sans les recopier sur la copie est sanctionné : ceci ne rapporte aucun point car certains résultats se devinent et de ce fait, les correcteurs ont besoin de savoir si leur obtention est licite ou non.
- Pour finir, certains candidats connaissent des théorèmes qu'il n'était pas indispensable de connaître pour cette épreuve et qui dépassent le cadre du programme (lequel ne comporte pas les notions de convergence uniforme et de convergence normale) : ils doivent savoir que leur application est délicate et nécessite de s'assurer des conditions d'application exactes. Les correcteurs n'ont validé les solutions que lorsque la rédaction de ces théorèmes était irréprochable.

Conclusion.

Le niveau global des candidats s'est légèrement amélioré, et le sujet a très certainement permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a d'excellents) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes et nécessitant rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons aux futurs candidats de se préparer d'une façon plus complète, en essayant de ne négliger aucun des points du programme.