CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 4

Aucun document ou matériel électronique n'est autorisé.

Le sujet comporte 3 exercices indépendants

Consignes

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Soit u un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^4$ tel que $u^2 = 0$.

1) a) Déterminer les valeurs propres de u.
   b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

2) Comparer Im u et Ker u. En déduire que $\mathrm{rg}(u) \leq 2$.

3) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(u) = 1$.
On considère un vecteur e_1 qui n'est pas dans Ker u et on pose $e_2 = u(e_1)$.
Vérifier que e_2 appartient à Ker u puis montrer que l'on peut trouver deux vecteurs e_3 et e_4 tels que (e_2, e_3, e_4) soit une base de Ker u. Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Quelle est la matrice de u dans cette base ?

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que u est de rang égal à 2.

4) a) Établir que Ker u = Im u.
   b) Soit (e_1, e_2) une base de Ker u. Justifier qu'il existe deux vecteurs e_3 et e_4 tels que $e_1 = u(e_3)$ et $e_2 = u(e_4)$ et montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
   c) Montrer que la matrice de u dans cette base est $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5) On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4),\ u \circ v = v \circ u\}$ et $P(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4),\ \exists S \in \mathbb{R}[X],\ v = S(u)\}$.
   a) Montrer que $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$. En caractérisant la matrice d'un élément v de $C(u)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), donner la dimension de $C(u)$.
   b) Montrer que la dimension de $P(u)$ est égale à 2.
   c) A-t-on $C(u) = P(u)$?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2\,(1+x)} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1) Montrer que f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $]0,1]$.
2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
3) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
4) On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction F_Y définie par :
   $$F_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{\ln 2} \times \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$$
   b) Vérifier que Y est une variable aléatoire à densité.
   c) Donner une densité de Y.
   d) Étudier l'existence de l'espérance de Y.

5) On note N la partie entière de Y. On admet que N est une variable aléatoire et on rappelle que, pour tout ω de Ω, on a : $N(\omega) \leq Y(\omega) < N(\omega)+1$.

a) Déterminer $N(\Omega)$.

b) Calculer, pour tout entier naturel k non nul, la probabilité $P(N=k)$ en fonction de k.

c) Montrer que : $P(N=k) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{k^2 \ln 2}$.

d) Étudier l'existence de $E(N)$.

6) On pose $Z = Y - N$.

a) Déterminer $Z(\Omega)$.

b) Utiliser la formule des probabilités totales pour donner la fonction de répartition de Z et vérifier que Z suit la même loi que X.

Problème

On se propose d'étudier la marche aléatoire d'une particule se déplaçant sur les points d'abscisses entières d'un axe gradué d'origine O.
La particule est à l'origine au temps 0 et se déplace à chaque unité de temps d'une unité sur la droite (l'abscisse de la particule augmentant d'une unité) avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$ ou d'une unité sur la gauche (l'abscisse de la particule diminuant d'une unité) avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
On suppose que les déplacements de la particule sont indépendants les uns des autres.
Pour tout entier naturel k, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ème}}$ déplacement a lieu vers la droite et qui vaut -1 si le $k^{\text{ème}}$ déplacement a lieu vers la gauche.
La suite $(X_k)_{k\geq 1}$ est donc une suite de variables aléatoires indépendantes dont la loi de probabilité est donnée par :

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note S_n l'abscisse de la particule à l'instant n, on a donc en particulier $S_0 = 0$.
On suppose que toutes les variables aléatoires décrites précédemment sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Questions préliminaires.

1) Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels strictement positifs vérifiant les deux conditions suivantes :

(i) La série de terme général a_n est divergente.

(ii) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$.

a) Justifier que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, | a_n - b_n | \leq \varepsilon\, b_n$.

b) En déduire que : $\forall n > n_0$, $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n_0} | a_k - b_k | + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$.

c) Montrer finalement que : $\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} b_k$

2) On admet la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$.

En déduire un équivalent simple de $\binom{2n}{n}$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Partie 1 : abscisse de la particule au temps n.

1) Donner, pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, l'espérance $E(X_k)$ et la variance $V(X_k)$ de la variable aléatoire X_k.

2) a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, exprimer S_n en fonction de certaines des variables X_k.
   b) En déduire, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, l'espérance $E(S_n)$ et la variance $V(S_n)$.

3) a) Vérifier que l'unique couple $(a,\ b)$ de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ tel que la variable aléatoire Y_k définie, pour tout entier k de $\mathbb{N}^*$, par $Y_k = aX_k + b$, suive la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, est le couple $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.
   b) En déduire la loi de S_n.
   c) Montrer que, pour tout couple $(n,\ m)$ de $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$, $S_{n+m} - S_n$ suit la même loi que S_m.
   d) En déduire la covariance des variables aléatoires S_n et S_{n+m}. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Partie 2 : nombre moyen de retours à l'origine.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note Z_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la particule est repassée à l'origine entre les instants 1 et $2n$ (1 et $2n$ compris).
On note O_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la particule est à l'origine à l'instant k, et 0 sinon.
1) Donner, selon la parité de k, la loi ainsi que l'espérance de la variable aléatoire O_k.

2) Exprimer Z_n en fonction de certaines des variables O_k et en déduire l'espérance de Z_n sous forme de somme.

3) a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

   b) En déduire, en utilisant les résultats des questions préliminaires, que : $E(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}$.

CONCOURS EDHEC - ADMISSION SUR TITRES

EN PREMIERE ANNEE

AVRIL 2015

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

CORRIGE

EDHEC BUSINESS SCHOOL

Exercice 1

1) a) Comme $u^2 = 0$, le polynôme X^2 est annulateur de u et ainsi, 0 est la seule valeur propre possible de u.
De plus, si 0 n'était pas valeur propre, alors u serait bijectif et en composant l'égalité $u^2 = 0$ par u^{-1}, on obtiendrait $u = 0$, ce qui n'est pas le cas puisque u n'est pas nul.
On a donc : $\text{Sp}(u) = \{0\}$.

b) Ayant 0 comme seule valeur propre, si u était diagonalisable, sa matrice dans une base de $\mathbb{R}^4$ serait la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont nuls, c'est-à-dire la matrice nulle, et on aurait $u = 0$, ce qui n'est pas le cas
Conclusion : u n'est pas diagonalisable.

2) Pour tout y de Im u, il existe un réel x tel que $y = u(x)$ et on a alors : $u(y) = u^2(x) = 0$, ce qui montre que y appartient à Ker u.
On a donc :

$$\text{Im } u \subset \text{Ker } u$$

On en déduit que $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker } u)$ et avec le théorème du rang, on obtient : $\text{rg}(u) \leq 4 - \text{rg}(u)$. Ceci donne :

$$\text{rg}(u) \leq 2$$

3) Comme on suppose que $\text{rg}(u) = 1$, on a $\dim(\text{Ker } u) = 3$.
On considère un vecteur e_1 qui n'est pas dans Ker u et on pose $e_2 = u(e_1)$.
On a $u(e_2) = u^2(e_1) = 0$ donc e_2 appartient à Ker u. La famille (e_2) est libre car $e_2 \neq 0$, sinon on aurait e_1 dans Ker u et, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (e_2) en une base (e_2, e_3, e_4) de Ker u.
Testons la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) en considérant 4 réels a, b, c et d tels que :

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0 \quad (*)$$

En appliquant u, il reste : $au(e_1) = 0$, c'est-à-dire $ae_2 = 0$. Comme $e_2 \neq 0$, on a $a = 0$.
En injectant ce résultat dans (*), il reste $be_2 + ce_3 + de_4 = 0$ et comme la famille (e_2, e_3, e_4) est libre, on a $b = c = d = 0$.
Conclusion : la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre et de cardinal 4 donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
Comme $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = u(e_3) = u(e_4) = 0$, la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) a) Comme u est de rang égal à 2, on a $\dim(\text{Ker } u) = \dim(\text{Im } u)$ et comme Im $u \subset$ Ker u, on peut conclure, grâce au théorème du sous-espace, que : Ker u = Im u.

b) Comme (e_1, e_2) est une base de Ker u, c'est aussi une base de Im u puisque Ker u = Im u.
Dès lors, par définition de l'image, il existe deux vecteurs e_3 et e_4 tels que $e_1 = u(e_3)$ et $e_2 = u(e_4)$.
Testons la liberté de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) en considérant 4 réels a, b, c et d tels que :

$$ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0 \quad (*)$$

En appliquant u, il reste : $cu(e_3)+du(e_4)=0$, c'est-à-dire $ce_1+de_2=0$. Comme (e_1,e_2) est une base de Ker u, c'est une famille libre et on en tire : $c=d=0$.
En injectant ce résultat dans (*), il reste $ae_1+be_2=0$ et pour la même raison, on a $a=b=0$.
Conclusion : la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) est libre et de cardinal 4 donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

c) On a $u(e_1)=0$, $u(e_2)=0$, $u(e_3)=e_1$ et $u(e_4)=e_2$ donc la matrice de u dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4) est $U=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

5) On est toujours sous l'hypothèse que rg(u) = 2.
a) $C(u)$ n'est pas vide car u appartient à $C(u)$.
$C(u)$ est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.
Si v et w sont deux éléments de $C(u)$ et si λ est un réel, alors on a :

$$u\circ(v+\lambda w)=u\circ v+\lambda u\circ w=v\circ u+\lambda w\circ u=(v+\lambda w)\circ u$$

Conclusion : $C(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

Soit $V=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}$ la matrice d'un élément v de $C(u)$ dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4), on a $UV=VU$, ce qui donne :

$$\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

On a alors : $\begin{pmatrix}c_1&c_2&c_3&c_4\\d_1&d_2&d_3&d_4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&a_1&a_2\\0&0&b_1&b_2\\0&0&c_1&c_2\\0&0&d_1&d_2\end{pmatrix}$.

On trouve donc : $c_1=c_2=d_1=d_2=0$, $c_3=a_1$, $c_4=a_2$, $d_3=b_1$, $d_4=b_2$.

Finalement : $V=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\\b_1&b_2&b_3&b_4\\0&0&a_1&a_2\\0&0&b_1&b_2\end{pmatrix}$.

La matrice V est donc combinaison linéaire des 8 matrices :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Comme ces 8 matrices forment une famille libre (il suffit de résoudre $V=0$ avec la matrice V écrite plus haut), on peut conclure : dim $(C(u))$ = 8.

b) Comme $u^2=0$, on a évidemment $P(u)$ = $\text{Vect}(Id,u)$. La famille (Id,u) est libre, sinon on aurait $u=\lambda Id$, ce qui donnerait $u^2=\lambda^2 Id=0$, d'où $\lambda=0$, puis $u=0$.
Conclusion : la dimension de $P(u)$ est égale à 2.

c) Les dimensions de $C(u)$ et de $P(u)$ sont différentes, on n'a donc pas $C(u) = P(u)$.

Exercice 2

1) On vérifie les trois points classiques :

- Pour tout x de [0, 1], $\dfrac{1}{1+x}$ est bien défini et positif et, comme f est nulle ailleurs, on conclut que f est positive sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur]0, 1[comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et f est nulle donc continue sur $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1.

- Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} f(t)dt$ sont nulles, l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est bien définie et on a $\int_0^1 f(t)dt = \dfrac{1}{\ln 2}\int_0^1 \dfrac{1}{1+t}dt = 1$. On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Les trois points précédents montre que f est bien une densité de probabilité.

2) On obtient facilement la fonction de répartition :

$\forall x<0$, $F_X(x)=0$

$\forall x>1$, $F_X(x)=1$

$\forall x\in[0,1]$, $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x f(t)dt = \dfrac{1}{\ln 2}\int_0^x \dfrac{1}{1+t}dt = \dfrac{1}{\ln 2}\times \ln(1+x)$

3) Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} t\,f(t)dt$ et $\int_{1}^{+\infty} t\,f(t)dt$ sont nulles, l'intégrale $\int_0^1 t\,f(t)dt$ est bien définie et on a $\int_0^1 tf(t)dt = \dfrac{1}{\ln 2}\int_0^1 \dfrac{t}{1+t}dt = \dfrac{1}{\ln 2}\int_0^1 \left(1-\dfrac{1}{1+t}\right)dt = \dfrac{1}{\ln 2}(1-\ln 2)$.

On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Ceci prouve que $E(X)$ existe et on a $E(X)=\dfrac{1-\ln 2}{\ln 2}$

De même $E(X^2)$ existe et on a :

$$E(X^2)=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}dt=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{t^2-1+1}{1+t}dt=\frac{1}{\ln 2}\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right).$$

Remarque. On pouvait calculer d'abord $E(X(X+1))$ puis en déduire $E(X^2)$.

On a alors : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{\ln 2}\left(-\frac{1}{2}+\ln 2\right)-\frac{(1-\ln 2)^2}{(\ln 2)^2}$.

En arrangeant un peu, on a :

$$V(X)=\frac{(2\ln 2-1)\ln 2}{2(\ln 2)^2}-\frac{2(1-\ln 2)^2}{2(\ln 2)^2}=\frac{3\ln 2-2}{2(\ln 2)^2}$$

4) a) Comme X est à valeurs dans $]0,1]$, on a $Y(\Omega)=[1,+\infty[$.

On a donc : $\forall x<1,\ F_Y(x)=0$.

$$\forall x\geq 1,\ F_Y(x)=P(Y\leq x)=P\left(\frac{1}{X}\leq x\right)=P\left(X\geq\frac{1}{x}\right)=1-F_X\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme $\frac{1}{x}$ appartient à $]0,1]$, on obtient : $\forall x\geq 1,\ F_Y(x)=1-\frac{1}{\ln 2}\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Conclusion :

$$F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<1\\ 1-\frac{1}{\ln 2}\times\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\geq 1\end{cases}$$

b) On vérifie que F_Y est de classe C^1 sur $]-\infty,1[$ en tant que fonction nulle et sur $]1,+\infty[$ en tant que composée bien définie puis différence de fonctions de classe C^1.

A fortiori, F_Y est continue sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$, mais de plus, F_Y est continue en 1 (les limites à droite et à gauche sont égales à $F_Y(1)=0$. Par conséquent, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.

On peut donc conclure que Y est une variable aléatoire à densité.

c) En dérivant F_Y ,sauf en 1, on obtient : $F_Y'(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<1\\ \frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{x(x+1)} \text{ si } x>1\end{cases}$. En posant, par exemple, $f_Y(1)=\frac{1}{2\ln 2}$, on obtient une densité f_Y de Y donnée par : $f_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<1\\ \frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{x(x+1)} \text{ si } x\geq 1\end{cases}$.

d) Comme pour tout x supérieur ou égal à 1, on a $x\,f_Y(x)=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{1}{x+1}$ et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x+1}dx$ est divergente, on est certain que Y n'a pas d'espérance.

5) a) Comme $Y(\Omega)=[1,+\infty[$, on a $N(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

b) Pour tout entier naturel k non nul, on a :

$$P(N=k)=P(k\leq Y<k+1)=P(k<Y\leq k+1)=F_Y(k+1)-F_Y(k)$$

$P(N=k)=\dfrac{1}{\ln 2}\times\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{1}{\ln 2}\times\ln\left(1+\dfrac{1}{k+1}\right)$

Conclusion :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(N=k)=\frac{1}{\ln 2}\times\ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)$$

c) On peut écrire : $P(N=k)=\dfrac{1}{\ln 2}\times\ln\left(\dfrac{k(k+2)+1}{k(k+2)}\right)=\dfrac{1}{\ln 2}\times\ln\left(1+\dfrac{1}{k(k+2)}\right)$

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k(k+2)}=0$, on en déduit : $P(N=k)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{k(k+2)\ln 2}$.

On a donc bien : $P(N=k)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{k^2\ln 2}$.

d) Pour tout entier naturel k non nul, on a $k\,P(N=k)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{k\ln 2}$ et la série de terme général $\dfrac{1}{k}$ est divergente donc N ne possède pas d'espérance en vertu du critère d'équivalence pour les séries à termes positifs.

6) a) Comme, pour tout ω de Ω, on a : $N(\omega)\leq Y(\omega)<N(\omega)+1$, on peut en déduire :

$0\leq Y(\omega)-N(\omega)<1$, c'est-à-dire : $0\leq Z(\omega)<1$

En conclusion, on a : $Z(\Omega)=[0,1[$.

b) On en conclut tout de suite :

- $\forall x<0,\ F_Z(x)=0$
- $\forall x>1,\ F_Z(x)=1$
- $\forall x\in[0,1],\ F_Z(x)=P(Z\leq x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P([Z\leq x]\cap[N=k])$.

On a $[Z\leq x]\cap[N=k]=[Y-N\leq x]\cap[k\leq Y<k+1]=[Y\leq k+x]\cap[k\leq Y<k+1]$.

Comme $x\in[0,1]$, on peut résumer : $[Z\leq x]\cap[N=k]=[k\leq Y<k+x]$

En remplaçant, on trouve successivement :

$F_Z(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P(k\leq Y<k+x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(F_Y(k+x)-F_Y(k)\right)$

$F_Z(x)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}P(k\leq Y<k+x)=\dfrac{1}{\ln 2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)-\ln\left(1+\dfrac{1}{k+x}\right)\right)$.

Considérons une somme partielle : $S_n=\dfrac{1}{\ln 2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)-\ln\left(1+\dfrac{1}{k+x}\right)\right)$.

$S_n=\dfrac{1}{\ln 2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)-\ln\left(\dfrac{k+x+1}{k+x}\right)\right)$

$$S_n = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln k\right)-\frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(x+k+1)-\ln(x+k)\right)$$

Après télescopage, il reste :

$$S_n = \frac{1}{\ln 2}\ln(n+1)-\frac{1}{\ln 2}\left(\ln(x+n+1)-\ln(x+1)\right)$$

$$S_n = \frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right)+\frac{\ln(x+1)}{\ln 2}.$$

Après passage à la limite, on obtient : $\forall x \in [0, 1]$, $F_Z(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln 2}$.

Les trois points précédents montrent que Z suit la même loi que X.

Problème

1) a) Comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ et comme b_n est non nul (car strictement positif), on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$. Par définition de la limite, on a donc : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ \left|\dfrac{a_n}{b_n}-1\right| \leq \varepsilon$. En multipliant chaque membre par $|b_n| = b_n$, on obtient :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ |a_n - b_n| \leq \varepsilon\, b_n}$$

b) Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|$.

En scindant cette dernière somme en deux, cette fois pour tout entier naturel n supérieur strictement à n_0, on trouve : $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n_0}|a_k - b_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n}|a_k - b_k|$. Dans la dernière somme, l'indice k prend des valeurs supérieures à n_0 donc on peut appliquer à chaque terme le résultat de la question 1a), ce qui donne : $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n_0}|a_k - b_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n}|\varepsilon b_k|$.

Comme ε et b_k sont strictement positifs, on a finalement :

$$\boxed{\forall n \geq n_0,\ \left|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n_0}|a_k - b_k| + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k}$$

c) En divisant chaque membre par $\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right|$ qui est égal à $\sum_{k=1}^{n} b_k$, on obtient :

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}-1\right| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0}|a_k - b_k|}{\sum_{k=1}^{n} b_k}+\varepsilon\frac{\sum_{k=n_0+1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n} b_k}$$

On a $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n_0}|a_k-b_k|}{\sum_{k=1}^{n}b_k}=0$ (le numérateur est constant et le dénominateur tend vers $+\infty$ car la série de terme général b_n diverge et est à termes positifs).

Par conséquent (toujours par définition d'une limite), on peut écrire :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n > n_1, \ \frac{\sum_{k=1}^{n_0}|a_k-b_k|}{\sum_{k=1}^{n}b_k}\leq \varepsilon$$

De plus, $\varepsilon\dfrac{\sum_{k=n_0+1}^{n} b_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}\leq\varepsilon$ car les deux sommes sont à termes positifs et la somme du numérateur contient moins de termes que celle du dénominateur.

En combinant ces deux résultats, on obtient, en posant $n_2=\max(n_0,n_1)$:

$$\forall\varepsilon>0, \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n > n_2, \ \left|\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}-1\right|\leq 2\varepsilon .$$

Par définition d'une limite (c'est la dernière fois !), ceci veut dire que $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}=1$.

En d'autres termes :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}a_k \underset{+\infty}{\sim}\sum_{k=1}^{n}b_k}$$

2) On sait que : $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$. Par compatibilité des équivalents avec la multiplication et la division, on obtient en utilisant l'équivalent rappelé : $\binom{2n}{n}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{\sqrt{2\pi(2n)}\,(2n)^{2n}\,e^{-2n}}{2\pi n\left(n^n\right)^2\left(e^{-n}\right)^2}$

En arrangeant un peu, on trouve : $\binom{2n}{n}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{2\sqrt{\pi n}\,2^{2n}n^{2n}e^{-2n}}{2\pi n\times n^{2n}e^{-2n}}$.

En simplifiant, on a finalement :

$$\boxed{\binom{2n}{n}\underset{+\infty}{\sim}\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}}$$

Partie 1 : abscisse de la particule au temps n

1) La variable aléatoire X_k est finie donc elle possède une espérance.

Comme de plus on a $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$, on obtient :

$E(X_k) = 1\times\dfrac{1}{2} - 1\times\dfrac{1}{2} = 0$

De même, on a : $E(X_k{}^2) = 1\times\dfrac{1}{2} + 1\times\dfrac{1}{2} = 1$, et d'après le théorème de Koenig-Huygens, on obtient :
$V(X_k) = E(X_k{}^2) - (E(X_k))^2 = 1 - 0 = 1$.

En résumé :

$$\boxed{E(X_k) = 0 \text{ et } V(X_k) = 1}$$

2) a) On a bien sûr $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

b) On a $E(X_k) = 0$ et on déduit, par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = 0$.

On a $V(X_k) = 1$ et on déduit, par indépendance des X_k : $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n$.

Ces deux formules restent valables pour $n = 0$.

3) a) En posant $Y_k = aX_k + b$, on a déjà : $Y_k(\Omega) = \{-a+b,\, a+b\}$. Comme a est strictement positif, la seule option est : $-a+b = 0$ et $a+b = 1$, ce qui donne : $a = b = \dfrac{1}{2}$.

On vérifie aisément que pour ces deux valeurs, on a :

$$Y_k(\Omega) = \{0, 1\} \text{ et } P(Y_k = 1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$$

b) On sait que $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} (2Y_k - 1) = 2\sum_{k=1}^{n} Y_k - n$

Or les X_k étant des variables indépendantes, les Y_k le sont également, d'après le lemme des coalitions, et ainsi $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ qui est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$. On en déduit que $S_n(\Omega) = \{2j - n, 0 \le j \le n\}$ et on a :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\ P(S_n = 2j - n) = \binom{n}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c) On a $S_{n+m} - S_n = \sum_{k=1}^{n+m} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} X_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} (2Y_k - 1) = 2\sum_{k=n+1}^{n+m} Y_k - m$.

On a aussi : $S_m = 2\sum_{k=1}^{m} Y_k - m$.

Toujours par indépendance des Y_k, les sommes $\sum_{k=1}^{m} Y_k$ et $\sum_{k=n+1}^{n+m} Y_k$ suivent toutes deux la loi binomiale $\mathcal{B}\left(m, \frac{1}{2}\right)$, ce qui montre que, pour tout couple (n, m) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $S_{n+m} - S_n$ suit la même loi que S_m.

d) On a : $V(S_m) = V(S_{n+m} - S_n) = V(S_{n+m}) + V(S_n) - 2\,\mathrm{Cov}(S_n, S_{n+m})$

On en déduit : $\mathrm{Cov}(S_n, S_{n+m}) = \frac{1}{2}\left(V(S_{n+m}) + V(S_n) - V(S_m)\right) = \frac{1}{2}(n + m + n - m) = n$.

Comme la covariance des variables aléatoires S_n et S_{n+m} est différente de 0, les variables aléatoires S_n et S_{n+m} ne sont pas indépendantes.

Partie 2 : nombre moyen de retours à l'origine.

1) • La variable O_{2k+1} est une variable certaine égale à 0 et son espérance vaut 0.

• L'événement ($O_{2k} = 1$) est réalisé si la particule se trouve à l'origine à l'instant $2k$.

On a donc, pour tout entier naturel k non nul : $P(O_{2k} = 1) = P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$, c'est-à-dire que O_{2k} suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$. On a donc : $E(O_{2k}) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$.

2) On a $Z_n = \sum_{k=1}^{2n} O_k = \sum_{k=1}^{n} O_{2k}$ d'où (linéarité de l'espérance) :

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} E(O_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}$$

3) a) On peut écrire : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \sqrt{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$.

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction qui à x associe $\frac{1}{\sqrt{x}}$, cette fonction étant continue sur $]0,1]$ et d'intégrale convergente (Riemann de paramètre $\frac{1}{2}$) donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

On en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = 1$, ce qui prouve que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Remarque. On pouvait aussi appliquer le préliminaire aux suites (a_k) et (b_k) définies par :
$a_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ et $b_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ après avoir vérifié que la série de terme général a_k diverge et que $a_k \underset{+\infty}{\sim} b_k$

b) En utilisant le second résultat préliminaire, on a : $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (Riemann de paramètre $\dfrac{1}{2}$) et à termes strictement positifs, on peut alors appliquer le premier résultat préliminaire, ce qui donne :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

On en déduit, grâce aux questions 2) et 3a), que : $E(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \times 2\sqrt{n}$

On a donc :

$$E(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

ADMISSION SUR TITRES EN PREMIERE ANNEE

RAPPORT DE CORRECTION 2015

Epreuve de MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve.

L'épreuve, longue comme d'habitude, et peut-être un peu plus technique que l'année dernière, comportait trois exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse, probabilités et statistiques. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté et très sélectif tout en respectant scrupuleusement le programme.

• L'exercice 1, portant sur le programme d'algèbre linéaire, proposait l'étude d'une catégorie d'endomorphismes u de $\mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$u^2 = 0$$

L'objectif était, selon le rang de u, de trouver une base dans laquelle la matrice de u s'écrivait de façon simple. Dans le cas où le rang de u valait 2, on comparait ensuite le commutant de u avec l'espace des polynômes de u.

• L'exercice 2 avait pour but l'étude d'une variable aléatoire X de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln 2(1+x)} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

L'énoncé proposait d'étudier l'inverse Y de X, puis sa partie décimale $Y - \lfloor Y \rfloor$, et enfin de montrer que $Y - \lfloor Y \rfloor$ avait même loi que X.

• L'exercice 3, portant sur le programme d'analyse et de probabilités, avait pour objectif d'étudier le voyage d'une particule sur un axe gradué, le voyage débutant à l'origine, la particule pouvant se déplacer à chaque unité de temps d'une unité sur la droite (l'abscisse de la particule augmentant d'une unité) avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou d'une unité sur la gauche (l'abscisse de la particule diminuant d'une unité) avec la probabilité $\frac{1}{2}$

On étudiait ensuite le nombre moyen de retours à l'origine entre les instants 1 et $2n$.

Moyenne.

Pour les 756 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 9,41 sur 20 pour un écart-type d'environ 6,14 (0,4 point au-dessus de l'an dernier), la médiane étant, quant à elle, égale à 9,65.

187 candidats, soit 25% des candidats obtiennent une note inférieure ou égale à 4 (107 ont une note inférieure ou égale à 2).

97 candidats, soit 12% des candidats, obtiennent une note supérieure ou égale à 18.

Analyse des copies.

Les correcteurs notent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, comme d'habitude, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats. La moyenne, est nettement en dessous de celle de l'année dernière. Les correcteurs y voient deux raisons : l'augmentation importante

du nombre de candidats (738 contre 600) et le fait que certains de ces candidats soient les premiers à avoir suivi le nouveau programme du lycée qui, en ce qui concerne les mathématiques, tend à faire expérimenter plus qu'à démontrer.
Beaucoup de candidats ayant des notes extrêmement basses, semblent très mal préparés : ils connaissent assez souvent les concepts mais ne les maîtrisent pas du tout.
Certains candidats ont visiblement été obligés de faire des impasses, certainement par manque de temps pour préparer cette épreuve.
En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants :

Exercice 1

- Les notions de déterminant, endomorphisme nilpotent, polynôme caractéristique, polynôme minimal, ainsi que le théorème de Cayley-Hamilton ne sont pas au programme.
- Oser prétendre que X^2 est un polynôme scindé à racines simples est pour le moins étonnant et prouve qu'il est inutile de se promener en dehors du programme.
- Les racines d'un polynôme annulateur de u sont, pour la plupart des candidats, les valeurs propres de u (alors que ce ne sont que les valeurs propres possibles).
- Trop de candidats pensent que si un vecteur n'est pas dans $\operatorname{Ker} u$, alors il est dans $\operatorname{Im} u$.
- Un certain nombre pensent que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires (certains allant même jusqu'à l'affirmer alors que l'on avait $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u$!!!).
- Le fait que l'endomorphisme u ne soit pas l'endomorphisme nul ne permet en aucun cas d'affirmer que, pour tout x de $\mathbb{R}^4$, on a $u(x) \neq 0$.

Exercice 2

- La notion d'intégrabilité n'est pas au programme.
- Beaucoup de formules inventées au sujet de la loi de la partie entière d'une variable aléatoire.
- Peu de candidats maîtrisent la caractérisation de la fonction de répartition d'une variable à densité.

Il en est même qui ne savent pas ce qu'est une densité.

- Ayant $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k+1}$, ce qui est correct, il est hors de question de conclure que $\ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.
- Un grand nombre de candidats pensent que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$ est impropre en 0.
- Trop de candidats ignorent les règles élémentaires de priorité opératoire et ont cru que $\ln 2(x+1)$ signifiait $\ln\big(2(x+1)\big)$.
- Presque tous les candidats écrivent $\left(\frac{1}{X} \leq x\right)=\left(X \geq \frac{1}{x}\right)$ sans argumenter, notamment sur le signe de X et x.

Exercice 3

- Le théorème de sommation des équivalents n'est pas au programme.
- Il est grave de penser que $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n-b_n\right)=0$.
- De même, sachant que la série de terme général a_n diverge, beaucoup pensent que, forcément, a_n ne tend pas vers 0.
- Il est incroyable de lire (trop souvent) qu'une variable prenant les valeurs -1 et 1 est une variable de Bernoulli (ce qui rendait les questions suivantes plus que bizarres !).
- Pour finir, il est faux de croire que $(2n)!$ soit égal à $2\times n!$.

Conclusion.

L’épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d’une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point du programme : les trois "compartiments" de ce programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) sont essentiels pour une bonne continuation des études à l'EDHEC.

Pour terminer, les correcteurs rappellent que les candidats doivent s’en tenir strictement aux termes du programme de cette épreuve (disponible sur le site de l’EDHEC).