BIENVENUE
DANS NOS
RESEAUX
D'ENERGIE
Avec 250 entreprises partenaires, 27 000 anciens diplômés présents dans 121 pays, un maillage unique de professeurs, d'associations, et d'ambassadeurs, le réseau de l'EDHEC est une véritable force sur laquelle vous pourrez compter tout au long de votre cursus et de votre carrière. Venez vous inscrire dans une dimension résolument internationale et découvrir un nouveau monde, celui des réseaux et de l'excellence, qui vous ouvrira d'innombrable portes.
www.edhec-ge.com
Marc-Antoine,
étudiant en pré-Master
EDHEC
BUSINESS SCHOOL

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Lundi 6 mai 2013 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \le u_n \le 1$.

b) Étudier les variations de la suite (u_n).

c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

2) a) Écrire une fonction Pascal qui renvoie la valeur de u_n.

b) En déduire un programme, rédigé en Turbo Pascal, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a : $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Pour tout entier naturel k, exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

b) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1})$.

c) Donner pour finir la nature de la série de terme général v_n^2 ainsi que la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$.

Exercice 2

1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
b) Déterminer une base (a) de Ker$f$ ainsi qu'une base (b, c) de Imf.
c) Montrer que Imf^2 = Ker$f$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que : $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul.
En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, on a donc :

$$M^2 \neq 0 \text{ et } M^3 = 0$$

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que Img^2 = Ker$g$.

2) a) Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.
b) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que 0 est la seule valeur propre de g.
c) En déduire, toujours en raisonnant par l'absurde, que g n'est pas diagonalisable.

3) a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.
b) Montrer que $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
d) Déterminer Im g et donner sa dimension. En déduire une base de Ker g. Pour finir, déterminer Im g^2 puis conclure.

Exercice 3

Dans cet exercice, la lettre n désigne un entier naturel.
On dispose d'une urne contenant au départ n boules blanches et $(n+2)$ boules noires. On dispose également d'une réserve infinie de boules blanches et de boules noires.
Pour tout entier naturel j, on dit que l'urne est dans l'état j lorsqu'elle contient j boules blanches et $(j+2)$ boules noires. Au départ, l'urne est donc dans l'état n.

On réalise une succession d'épreuves, chaque épreuve se déroulant selon le protocole suivant :
Pour tout entier naturel j non nul, si l'urne est dans l'état j, on extrait une boule au hasard de l'urne.

- Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne, l'urne est alors dans l'état $(j-1)$.
- Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne et on remet en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne, l'urne est alors dans l'état $(j+1)$.

1) Dans cette question, on suppose que $n = 1$ (l'urne contient donc une boule blanche et 3 boules noires) et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la première épreuve et X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches encore présentes dans l'urne après la deuxième épreuve.
On admet que X_1 et X_2 sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

a) Donner la loi de X_1.
b) Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_2.
c) Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.

On rappelle que random(n) renvoie au hasard un entier compris entre 0 et $n-1$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cet exercice et pour qu'il affiche les valeurs des variables aléatoires X_1 et X_2.

```
Program simul ;
Var X1, X2, tirage : integer ;
Begin
Randomize ;
tirage : = random(4) ; If tirage = 0 then X1 : = ------ else X1 : = ------ ;
If (X1 = 0)  then  X2 : = ------
             Else  begin   tirage : = random(6) ;
                           If tirage <= 1 then X2 : = ------ else X2 : = ------ ;
                   end ;
Writeln (X1, X2) ;
end.
```

On revient au cas général (n est donc un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1) et on décide que les tirages s'arrêtent dès que l'urne ne contient plus de boules blanches.
Pour tout j de $\mathbb{N}$, on note alors E_j l'événement : « l'urne est dans l'état j initialement et les tirages s'arrêtent au bout d'un temps fini ». On pose $e_j = P(E_j)$ et l'on a bien sûr $e_0 = 1$.

2) Montrer, en considérant les deux résultats possibles du premier tirage (c'est-à-dire au début du jeu lorsque l'urne est dans l'état n) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}.$$

3) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ e_n \geq e_{n+1}$.
b) En déduire que la suite (e_n) est convergente.

On admet pour la suite que $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n = 0$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = (n+1) e_n$.
a) Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, écrire u_{n+1} en fonction de u_n et u_{n-1}.
b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et e_1.
c) Montrer enfin que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = (2e_1 - 1)\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}$.

Déterminer la valeur de e_1, puis en déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de e_n en fonction de n.

Problème

1) On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$. En déduire sans calcul $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$.
b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et admettant f comme densité.

2) a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.
   b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

3) Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X, est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} \quad \text{si } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} \quad \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

4) a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
   b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.
   c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x) \text{ si } x \in [0, 1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

   d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

5) On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.
On pose $I = \text{Inf}\,(U, V)$, c'est-à-dire que, pour tout ω de Ω, on a $I(\omega) = \text{Min}\,(\, U(\omega), V(\omega)\,)$.
On admet que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et on rappelle que, pour tout réel x, on a $P(I > x) = P(\,[U > x] \cap [V > x]\,)$.
Pour finir, on note F_I la fonction de répartition de I.
   a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.
   b) En déduire que I suit la même loi que Y.

6) On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ $(n \ge 2)$, toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $I_n = \text{Inf}\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$.
Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

7) Simulation informatique de la loi de Y.
Compléter la déclaration de fonction suivante pour qu'elle simule la loi de Y.

```
Function y : real ;
Var   u, v : real ;
Begin
   Randomize ;
   u : = ------ ; v : = ------ ;
   If (u < v) then y : = ------ else y : = ------ ;
End ;
```

Corrigé EDHEC

Exercice 1..

1) a) On procède par récurrence.

• $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 \leq 1$.

• Supposons, pour un n fixé dans $\mathbb{N}$ que : $0 \leq u_n \leq 1$.

Par croissance de la fonction $t \mapsto t^2$ sur , on a : $0 \leq u_n^2 \leq 1$

Il reste à ajouter 1, ce qui donne $1 \leq u_n^2 + 1 \leq 2$.

En divisant par 2, on obtient : $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$, ce qui implique que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

• On a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1}$$

b) Pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n^2+1}{2} - u_n = \dfrac{u_n^2+1-2u_n}{2} = \dfrac{(u_n-1)^2}{2}$.

Ceci prouve que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante}}$$

c) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1) donc elle converge.

Par ailleurs, si l'on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors on a aussi $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$.

En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$, comme la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue en ℓ, on trouve : $\ell = \dfrac{\ell^2+1}{2}$.

On a tout de suite $\dfrac{(\ell-1)^2}{2} = 0$, ce qui donne $\ell = 1$.

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$$

2) a) Voici une version récursive :

Function u(n : integer) : real ;
  Begin
    If $n = 0$ **then** u : = 0 **else** u : = (sqr(u(n−1)) + 1) / 2 ;
  End ;

Voici une version itérative :

```
Function u(n : integer) : real ;
   Var   k : integer ;
         aux : real ;  {la variable aux contiendra les valeurs prises par u_k au cours de la boucle}
   Begin
      aux : = 0 ;
      For k : = 1 to n do aux : = (sqr(aux) + 1) / 2 ;
      u : = aux ;
   End ;
```

b) Program edhec2013 ;

```
Var   n : integer ;
Begin
n : = 0 ; Repeat n : = n + 1 ; until (u(n) > 0.999) ;
Writeln(n) ;
End.
```

3) a) Pour tout entier naturel k, on a : $v_k - v_{k+1} = (1 - u_k) - (1 - u_{k+1}) = u_{k+1} - u_k$.

On a donc : $v_k - v_{k+1} = \dfrac{(u_k - 1)^2}{2}$, ce qui s'écrit :

$$\boxed{v_k - v_{k+1} = \frac{v_k^{\,2}}{2}}$$

b) $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}$. En posant $i = k + 1$ dans la deuxième somme, on trouve : $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Les termes communs aux deux sommes se neutralisent et il reste :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = v_0 - v_n$. Comme $v_0 = 1 - u_0 = 1$ et $v_n = 1 - u_n$, on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = u_n}$$

c) D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 = 2\sum_{k=0}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = 2\,u_n$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, on peut affirmer que $\sum_{k=0}^{n-1} v_k^2$ a une limite finie (égale à 2) lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui veut dire que :

$$\boxed{\text{La série de terme général } v_n^{\,2} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} v_k^2 = 2}$$

Exercice 2..

1) a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a bien :

$$\boxed{A^2 \neq 0 \text{ et } A^3 = 0}$$

b) On va résoudre le système d'équations $AX=0$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On a alors : $AX=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ -x-y-z=0 \\ -x-z=0 \end{cases}$

Avec la transformation $L_2 \leftarrow L_3 - L_2$, on obtient :

$AX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ y=0 \\ -x-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=-x$ et $y=0$.

$AX=0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ceci prouve que, en posant $a = (1, 0, -1)$, on a : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(a)$

Comme le vecteur a est non nul, on a bien :

$$\boxed{(a) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} f}$$

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, le théorème du rang assure que $\dim \operatorname{Im} f = 2$.
Par ailleurs, $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ et comme $f(e_1) = f(e_3) = (2, -1, -1)$ et $f(e_2) = (1, -1, 0)$, on a :

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}((2,-1,-1), (1,-1,0))}$$

En posant $b = (2, -1, -1)$ et $c = (1, -1, 0)$, on vient de montrer que (b, c) est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. De plus, elle contient 2 vecteurs et $\operatorname{Im} f$ est de dimension 2, donc :

$$\boxed{(b, c) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f}$$

c) Comme $A^2 = = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{vect}(\,(1, 0, -1)\,) = \mathrm{vect}(a)$.

$$\boxed{\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Ker}\, f}$$

2) a) Comme $M^3 = 0$, le polynôme X^3 est un polynôme annulateur de M. De plus, on sait que les valeurs propres de M (donc de g) sont parmi les racines de tout polynôme annulateur de M, et comme la seule racine de X^3 est 0, alors :

$$\boxed{\text{La seule valeur propre possible de } g \text{ est } 0}$$

b) D'autre part, si 0 n'était pas valeur propre, M serait inversible et, en multipliant la relation $M^3 = 0$ par M^{-1}, on aurait $M^2 = 0$, ce qui est faux d'après l'énoncé.

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de } g \text{ est } 0}$$

c) On raisonne par l'absurde.
Si g était diagonalisable, alors M serait semblable à une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M, donc tous nuls.
En notant 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existerait donc une matrice P inversible telle que l'on ait $M = P\, 0_3\, P^{-1}$ et on aurait $M = 0_3$, puis $M^2 = 0_3$ et ceci est faux d'après l'énoncé.

$$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

3) a) Comme g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, on peut dire que

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } u \text{ tel que } g^2(u) \neq 0}$$

b) Pour montrer que $(\, u, g(u), g^2(u)\,)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que c'est une famille libre, puisqu'elle contient 3 vecteurs et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
Soit donc 3 réels a, b et c tels que $a\,u + b\,g(u) + c\,g^2(u) = 0$. (1)
En composant par g, on obtient $g(\,a u + b g(u) + c g^2(u)\,) = g(0)$.
Comme g est linéaire, on a alors : $a\,g(u) + b\,g^2(u) + c\,g^3(u) = 0$.
On se souvient que $g^3 = 0$ donc il reste : $a\,g(u) + b\,g^2(u) = 0$. (2)
En composant encore par g, on obtient : $a\,g^2(u) + b\,g^3(u) = 0$, soit $a\,g^2(u) = 0$ (car $g^3 = 0$).
Comme $g^2(u) \neq 0$, on a $a = 0$.
En remplaçant a par 0 dans l'égalité (2), on en déduit : $b = 0$ (car $g^2(u) \neq 0$).
En remplaçant alors a et b par 0 dans l'égalité (1), on trouve pour finir : $c = 0$.
La famille $(\, u, g(u), g^2(u)\,)$ est libre et on peut conclure :

$$\boxed{(\, u, g(u), g^2(u)\,) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

c) On a :
$g(u) = 0\,u + 1\,g(u) + 0\,g^2(u)$.
$g(\,g(u)\,) = g^2(u) = 0\,u + 0\,g(u) + 1\,g^2(u)$.
$g(\,g^2(u)\,) = g^3(u) = 0 = 0\,u + 0\,g(u) + 0\,g^2(u)$.

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée, on en déduit que :

$$\boxed{\text{La matrice } N \text{ de } g \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ est : } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) La matrice N est la matrice de g dans la base $\mathcal{B}' = (\, u, g(u), g^2(u)\,)$.
On en déduit, par lecture des colonnes de N, que :

$$\boxed{\operatorname{Im} g = \operatorname{vect}(\, g(u), g^2(u)\,)}$$

La famille $(\, g(u), g^2(u)\,)$ est libre (ce sont 2 vecteurs de la base $\mathcal{B}'$) donc $(\, g(u), g^2(u)\,)$ est une base de $\operatorname{Im} g$. On a donc :

$$\boxed{\dim \operatorname{Im} g = 2}$$

On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} g = 1$.
Par ailleurs, la troisième colonne de N assure que $g^2(u)$ est un vecteur non nul élément de $\operatorname{Ker} g$, et comme $\dim \operatorname{Ker} g = 1$, la famille $(g^2(u)\,)$ est une base de $\operatorname{Ker} g$.
On a donc :

$$\boxed{\operatorname{Ker} g = \operatorname{vect}\,(\, g^2(u)\,)}$$

Pour finir, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On voit alors, comme pour $\operatorname{Im} g$, que $\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{vect}\,(\, g^2(u)\,)$ et on a donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Ker} g}$$

Exercice 3..

1) a) Au premier tirage, soit on tire une boule blanche et il n'y a plus de boules blanches dans l'urne, ce qui réalise $(X_1 = 0)$, soit on tire une boule noire et l'urne contient alors 2 boules blanches (puisqu'une boule blanche est rajoutée dans l'urne), ce qui réalise $(X_1 = 2)$.
On a donc :

$$\boxed{X_1(\Omega) = \{0, 2\},\ P(X_1 = 0) = \frac{1}{4} \text{ et } P(X_1 = 2) = \frac{3}{4}}$$

b) Après le premier tirage, d'après la règle du jeu, on a soit 0 boule blanche et 2 boules noires, soit 2 boules blanches et 4 boules noires dans l'urne.
$\rightarrow$ Dans le premier cas, on est certain de tirer une boule noire au deuxième tirage, donc, d'après la règle du jeu, l'urne contient une boule blanche et 3 boules noires et X_2 prend la valeur 1.
$\rightarrow$ Dans le deuxième cas :
• Soit on tire une boule blanche et l'urne contient alors une boule blanche et 3 boules noires, ce qui fait que X_2 prend encore la valeur 1.
• Soit on tire une boule noire et l'urne contient alors 3 boules blanches et 5 boules noires, ce qui fait que X_2 prend la valeur 3.

Pour conclure, on a :

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{1, 3\}}$$

En notant B_1 (respectivement N_1) l'événement « la première boule tirée est blanche (respectivement noire) », la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (B_1, N_1) s'écrit :

$$P(X_2 = 1) = P(B_1)\, P_{B_1}(X_2 = 1) + P(N_1)\, P_{N_1}(X_2 = 1)$$

On a : $P_{B_1}(X_2 = 1) = 1$ car si B_1 est réalisé, on est certain de tirer une boule noire au deuxième tirage (puisque l'urne contient 0 boule blanche et 2 boules noires) et de ce fait, l'urne contiendra une seule boule blanche après le deuxième tirage.

On a aussi : $P_{N_1}(X_2 = 1) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ car l'urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

En remplaçant, on trouve : $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{4} \times 1 + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

De même, on a : $P(X_2 = 3) = P(B_1)\, P_{B_1}(X_2 = 3) + P(N_1)\, P_{N_1}(X_2 = 3)$.

On a : $P_{B_1}(X_2 = 3) = 0$ car si B_1 est réalisé, on est certain de piocher une boule noire et on aura une seule boule blanche dans l'urne à coup sûr (voir plus haut).

On a aussi : $P_{N_1}(X_2 = 3) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ car l'urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

En remplaçant, on trouve : $P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{4} \times 0 + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} = 0 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

En résumé :

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{1, 3\},\ P(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \text{ et } P(X_2 = 3) = \frac{1}{2}}$$

c)
```
Program simul ;
Var X1, X2, tirage : integer ;
Begin
tirage : = random(4) ; If tirage = 0 then X1 : = 0 else X1 : = 2 ;
If (X1 = 0)  then  X2 : = 1
             Else  begin   tirage : = random(6) ;
                           If tirage <= 1 then X2 : = 1 else X2 : = 3 ;
                   end ;
Writeln (X1, X2) ;
end.
```

2) En appliquant encore la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (B_1, N_1), on obtient : $P(E_n) = P(B_1)\, P_{B_1}(E_n) + P(N_1)\, P_{N_1}(E_n)$.

• Au départ, l'urne contient n boules blanches et $(n+2)$ boules noires, on a donc :

$P(B_1) = \dfrac{n}{2n+2}$ et $P(N_1) = \dfrac{n+2}{2n+2}$.

• Par ailleurs, $P_{B_1}(E_n) = e_{n-1}$: en effet, ayant obtenu une boule blanche au premier tirage, l'urne contient $n-1$ boules blanches et se retrouve donc dans l'état $(n-1)$. Ainsi, réaliser E_n revient à attendre l'arrêt des tirages, selon la même procédure, mais avec une urne dans l'état $(n-1)$, ce qui se fait avec la probabilité e_{n-1}.

• De même, $P_{N_1}(E_n) = e_{n+1}$: en effet, ayant obtenu une boule noire au premier tirage, l'urne contient $n+1$ boules blanches et se retrouve dans l'état $(n+1)$. Ainsi, réaliser E_n revient alors à

attendre l'arrêt des tirages, selon la même procédure, mais avec une urne dans l'état ($n+1$), ce qui se fait avec la probabilité e_{n+1}.
En injectant ces données dans la formule écrite plus haut et donnant $P(E_n)$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}}$$

3) a) • Pour $n = 0$, on a $e_0 = 1$ et comme e_1 est une probabilité, on a bien $e_0 \geq e_1$.

• Si l'on suppose, pour un entier naturel n fixé supérieur ou égal à 1, que l'on a $e_{n-1} \geq e_n$, alors $\frac{n}{2n+2} e_{n-1} \geq \frac{n}{2n+2} e_n$. Grâce à l'égalité obtenue à la question 2), on peut en déduire :
$e_n \geq \frac{n}{2n+2} e_n + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}$, soit : $e_n(1 - \frac{n}{2n+2}) \geq \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}$.
En finissant le calcul dans la parenthèse, on trouve $\frac{n+2}{2n+2} e_n \geq \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}$.
En simplifiant par $\frac{n+2}{2n+2} > 0$, on a obtient : $e_n \geq e_{n+1}$.

• On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, e_n \geq e_{n+1}}$$

b) La suite (e_n) est donc décroissante et comme elle est minorée par 0 (e_n est une probabilité), on peut conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (e_n) \text{ est convergente}}$$

4) a) On sait que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $e_n = \frac{n}{2n+2} e_{n-1} + \frac{n+2}{2n+2} e_{n+1}$.
En multipliant par $2n+2$, on obtient : $2(n+1)\, e_n = n\, e_{n-1} + (n+2)\, e_{n+1}$.
Comme $u_n = (n+1)\, e_n$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$, ce que l'on peut écrire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}}$$

b) On reconnaît que la suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 et son équation caractéristique est : $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui a pour seule solution $r = 1$. On sait, d'après le cours, qu'il existe deux réels λ et μ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\lambda n + \mu) \times 1^n = \lambda n + \mu$.

Comme $u_0 = 1 \times e_0 = 1$ et $u_1 = 2e_1$, on obtient le système : $\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 2e_1 \end{cases}$ d'où l'on déduit :

$$\lambda = 2e_1 - 1 \text{ et } \mu = 1$$

En remplaçant, on trouve :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (2e_1 - 1)\, n + 1}$$

c) On sait que $u_n = (n+1)\, e_n$ donc $e_n = \frac{u_n}{n+1}$. Par conséquent, en divisant par $n+1 \neq 0$ l'égalité obtenue à la question 4b), on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ e_n = (2e_1 - 1)\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on déduit de la relation ci-dessus : $2e_1 - 1 = \dfrac{n+1}{n}\, e_n - \dfrac{1}{n}$.

L'énoncé admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = 0$, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc après passage à la limite, on en déduit : $2e_1 - 1 = 0$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} (2e_1 - 1) = 2e_1 - 1$).

Conclusion :

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{2}}$$

En remplaçant dans l'encadré plus haut, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ e_n = \frac{1}{n+1}}$$

Problème ....

1) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ donc la restriction de f à l'intervalle [–1, 1] est continue. Ainsi, les deux intégrales $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ et $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ existent.

Sur [0, 1], on a $f(x) = 1 - x$ donc $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} (1-x)\,dx = \left[x - \dfrac{x^2}{2} \right]_0^1$

On a donc : $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = (1 - \dfrac{1}{2}) - 0 = \dfrac{1}{2}$.

L'intervalle [–1, 1] est centré en 0 et, pour tout réel x de [–1, 1], on a :

$$f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)$$

Par conséquent, la restriction de f à [–1, 1] est paire et on obtient : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \dfrac{1}{2}$.

Pour résumer :

$$\boxed{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \text{ et } \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}}$$

b) • La fonction f est nulle donc positive sur]–∞, –1[et sur]1, +∞[.
Pour tout x de [–1, 1], on a $|x| \leq 1$, ce qui prouve que f est positive sur [–1, 1].
La fonction f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.

• La fonction f est nulle donc continue sur]–∞, –1[et sur]1, +∞[.
Elle est également continue sur [–1, 1] comme différence de fonctions continues.
La fonction f est une continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en –1 et en 1.

• La relation de Chasles sur les intégrales et les calculs faits dans la première question prouvent que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$.

Comme f est nulle sur $]-\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergent et sont nulles. En regroupant les 4 intégrales, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Les trois points précédents prouvent que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité}}$$

2) a) La fonction qui, à tout réel x associe $x f(x)$, est continue sur $[-1, 1]$ et nulle ailleurs, donc l'intégrale $\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx$ existe et les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} x f(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x f(x)\,dx$ convergent et sont nulles. Tout ceci prouve que :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance}}$$

La fonction g, définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = x f(x)$ est impaire.

En effet, $g(-x) = -x(1 - |-x|) = -x\,(1 - |x|) = -g(x)$. On en déduit que $\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = 0$.

La relation de Chasles sur les intégrales convergentes donne alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = 0$.

$$\boxed{E(X) = 0}$$

b) De même, la fonction qui, à tout réel x associe $x^2 f(x)$, est continue sur $[-1, 1]$ et nulle ailleurs, donc l'intégrale $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx$ existe et les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} x^2 f(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ convergent et sont nulles.

Tout ceci prouve que :

$$\boxed{X \text{ possède un moment d'ordre } 2}$$

De plus, la fonction h, définie sur $[-1, 1]$ par $h(x) = x^2 f(x)$ est paire.

En effet : $h(-x) = (-x)^2(1 - |-x|) = x^2\,(1 - |x|) = h(x)$.

On en déduit que $\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2 (1-x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^2 - x^3)\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}.$$

La relation de Chasles sur les intégrales donne alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{6}$.

$$\boxed{E(X^2) = \frac{1}{6}}$$

La formule de Koenig-Huygens permet de finir le travail : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

On obtient alors :

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{6}}$$

3) Par définition, pour tout réel x, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

• Si $x \in\ ]-\infty, -1[$, alors, pour tout t de $]-\infty, x]$, on a $f(t) = 0$ et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

• Si $x \in [-1, 0]$, alors, pour tout t de $[-1, x]$, on a $f(t) = 1 + t$ et, comme pour tout t de $]-\infty, -1[$, on a $f(t) = 0$, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt = \left[t+\dfrac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x}$, ce qui donne :

$F(x) = (x + \dfrac{x^2}{2}) - (-1 + \dfrac{1}{2})$, soit : $F(x) = \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2}$.

• Si $x \in\ ]0, 1]$, alors, pour tout t de $[0, x]$, on a $f(t) = 1 - t$ et, comme pour tout t de $]-\infty, -1[$, on a $f(t) = 0$ et pour tout t de $[-1, 0]$, on a $f(t) = 1 + t$, on obtient :

$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{0}^{x} (1-t)\,dt = \left[t+\dfrac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[t-\dfrac{t^2}{2}\right]_{0}^{x}$, ce qui donne :

$F(x) = 0 - (-1 + \dfrac{1}{2}) + x - \dfrac{x^2}{2}$, soit : $F(x) = \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}$.

• Si $x \in\ ]1, +\infty[$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} 0\,dt = 0 + 1 + 0 = 1$.

Pour résumer :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2}+x+\dfrac{x^2}{2} \qquad \text{si } -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{1}{2}+x-\dfrac{x^2}{2} \qquad \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1 \ \text{ si } x > 1 \end{cases}}$$

4) a) Comme $Y = |X|$, on sait que Y prend des valeurs positives. Par conséquent :

$$\boxed{\forall x < 0,\ F_Y(x) = 0}$$

b) Pour tout réel x positif, on a : $F_Y(x) = P(Y \le x) = P(|X| \le x) = P(-x \le X \le x)$.
On a donc :

$$\boxed{\forall x \ge 0,\ F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x)}$$

c) • Si x appartient à $[0, 1]$, alors $-x$ appartient à $[-1, 0]$ et on a, grâce à la question 3) :

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \text{ (même en 0) et } F_X(-x) = \frac{1}{2} + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} = \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}$$

En remplaçant dans $F_Y(x)$, on trouve : $\forall x \in [0, 1]$, $F_Y(x) = \left(\dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}\right) - \left(\dfrac{1}{2} - x + \dfrac{x^2}{2}\right) = 2x - x^2$.

• Si x appartient à $]1, +\infty[$, alors $-x$ appartient à $]-\infty, -1[$ et on a :

$$F_X(x) = 1 \text{ et } F_X(-x) = 0$$

En remplaçant dans $F_Y(x)$, on trouve : $\forall x \in\ ]1, +\infty[$, $F_Y(x) = 1$

Bilan : $F_Y(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 2x-x^2 \text{ si } 0\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$

F_Y est de classe C^1 sauf peut-être en 0 et en 1 donc on peut dériver sauf en 0 et en 1 :

$$F_Y'(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 2-2x \text{ si } 0<x<1\\ 0 \text{ si } x>1\end{cases}$$

En posant par exemple $g(0)=2$ et $g(1)=0$, on obtient finalement une densité g de Y :

$$\boxed{g(x)=\begin{cases}2(1-x) \text{ si } x\in[0,1]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}}$$

d) Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x\,g(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x\,g(x)\,dx$ convergent et sont nulles, puisque g est nulle sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$.
De plus, la fonction qui à tout réel x de $[0, 1]$ associe $x\,g(x)$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 xg(x)dx$ existe. Ainsi, on peut affirmer que Y possède une espérance et :

$$E(Y=\int_0^1 xg(x)dx=2\int_0^1 (x-x^2)\,dx=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right).$$

Finalement :

$$\boxed{E(Y)=\frac{1}{3}}$$

Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} x^2\,g(x)\,dx$ et $\int_{1}^{+\infty} x^2\,g(x)\,dx$ convergent et sont nulles, puisque g est nulle sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$.
De plus, la fonction qui à tout réel x de $[0, 1]$ associe $x^2\,g(x)$ est continue sur $[0, 1]$ donc $\int_0^1 x^2\,g(x)\,dx$ existe. Ainsi, on peut affirmer que Y possède un moment d'ordre 2 et :

$$E(Y^2)=\int_0^1 x^2\,g(x)dx=2\int_0^1 (x^2-x^3)\,dx=2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6}.$$

Finalement, comme $V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$, on obtient : $V(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$, soit :

$$\boxed{V(Y)=\frac{1}{18}}$$

5) a) On a $P(I>x)=P(\,[U>x]\cap[V>x]\,)$, et, par indépendance de U et V, on obtient :
$P(I>x)=P(U>x)\,P(V>x)=(1-F_U(x))\,(1-F_V(x))$.
On a donc $1-F_I(x)=(1-F_U(x))\,(1-F_V(x))$, ce qui donne : $F_I(x)=1-(1-F_U(x))\,(1-F_V(x))$.

D'après le cours, on sait que $F_U(x)=F_V(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ x \text{ si } 0\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}$.

En remplaçant, on trouve :

$$\boxed{F_I(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 1-(1-x)^2=2x-x^2 \text{ si } 0\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}}$$

b) On peut effectivement conclure que :

$$\boxed{I \text{ suit la même loi que } Y}$$

6) Comme I_n prend la plus petite des valeurs prises par $X_1,...,X_n$, dire que la valeur prise par I_n est supérieure à *x*, c'est dire que les valeurs prises par $X_1,...,X_n$ sont toutes supérieures à *x* (sinon, si l'une de ces variables prenait une valeur inférieure ou égale à *x* alors, par définition du minimum, I_n prendrait aussi une valeur inférieure ou égale à *x*).
On a donc :

$$(I_n>x)=(X_1>x)\cap(X_2>x)\cap...\cap(X_n>x)$$

On en déduit $P(I_n>x)=P([X_1>x]\cap[X_2>x]\cap...\cap[X_n>x])$ et, par indépendance des variables X_i, on obtient : $P(I_n>x)=P(X_1>x)P(X_2>x)...P(X_n>x)$.
En notant F_n la fonction de répartition de I_n, on trouve :
$1-F_n(x)=(1-F_{X_1}(x))(1-F_{X_2}(x))...(1-F_{X_n}(x))$.
On en déduit : $F_n(x)=1-(1-F_{X_1}(x))(1-F_{X_2}(x))...(1-F_{X_n}(x))$
Comme les variables X_i suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$, on obtient :

$$\boxed{F_n(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 1-(1-x)^n \text{ si } 0\le x\le 1\\ 1 \text{ si } x>1\end{cases}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-x)^n=\begin{cases}0 \text{ si } 0<x\le 1\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-(1-x)^n\right)=\begin{cases}1 \text{ si } 0<x\le 1\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x\le 0\\ 1 \text{ si } x>0\end{cases}$.
Bilan : la suite de fonctions (F_n) converge vers la fonction *F* qui vaut 0 si *x* appartient à $]-\infty, 0]$ et qui vaut 1 si *x* appartient à $]0, +\infty[$. La fonction *F* coïncide, sauf en 0, avec la fonction de répartition d'une variable certaine égale à 0 donc :

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers une variable certaine égale à 0}}$$

7) La déclaration de fonction complétée est la suivante :

```
Function y : real ;
Var   u, v : real ;
Begin
   Randomize ;
   u : = random ; v : = random ;
   If (u < v) then y : = u else y : = v ;
End ;
```

EDHEC 2013

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

Présentation de l'épreuve :

• L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (troisième exercice et problème comme l'année dernière).
La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme. Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé ce sujet équilibré, bien construit, progressif dans la difficulté et bien adapté au public, l'exercice 3 étant jugé particulièrement difficile. Ils ont pu apprécier très précisément les connaissances des candidats, mais aussi leurs capacités à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leurs capacités à raisonner, ce qui est le premier but d'un texte de concours.
Les candidats les moins sérieusement préparés ont montré leurs faiblesses théoriques ainsi que leur mauvaise maîtrise des techniques de base.

• **L'exercice 1** proposait l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$. Les premières questions établissaient quelques propriétés élémentaires de la suite (u_n) et demandaient la rédaction d'un programme de calcul des termes de cette suite. La dernière question établissait la convergence de la série de terme général $(1-u_n)^2$.

Cet exercice a révélé les failles de certains candidats, notamment en ce qui concerne les mécanismes usuels de calcul (identités remarquables non reconnues), ce qui est relativement grave.

• **L'exercice 2** avait pour objectif de montrer que, si un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifie $g^2 \neq 0$ et $g^3 = 0$, alors on a : $\operatorname{Im} g^2 = \operatorname{Ker} g$. On commençait par l'étude d'un exemple puis on étudiait le cas général en déterminant une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g permettait de conclure.

Cet exercice a montré que les notions de noyau et d'image restent floues pour un nombre significatif de candidats. La différence entre famille génératrice et base est, elle aussi, peu claire chez nombre de candidats.

• **L'exercice 3,** portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif d'étudier une suite d'épreuves aléatoires, chacune consistant à extraire au hasard une boule d'une urne contenant n boules blanches et $n+2$ boules noires selon le protocole suivant :

- Si l'on obtient une boule blanche, alors cette boule n'est pas remise dans l'urne et on enlève de plus une boule noire de l'urne.
- Si l'on obtient une boule noire, alors cette boule est remise dans l'urne et on remet en plus une boule blanche et une boule noire dans l'urne.

Le but était de déterminer la probabilité pour que la suite d'épreuves s'arrête au bout d'un temps fini. Ce type d'exercice permet de distinguer les candidats qui réfléchissent : il a permis aux meilleurs de faire la différence, notamment car certaines questions étaient ouvertes et qu'il fallait vraiment réfléchir pour trouver le résultat.

• **Le problème**, portant aussi sur le programme de probabilités, mais sur la partie "variables à densité", avait pour but d'étudier une variable aléatoire X de densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite proposait de montrer que la variable $Y = |X|$ suivait la même loi que le sup de deux variables indépendantes suivant la loi uniforme sur [0, 1]. La fin de ce problème proposait une simulation informatique de Y.

Le problème a été abordé avec des fortunes diverses, certains candidats n'ayant visiblement aucune connaissance sur cette partie du programme de seconde année. Dans l'ensemble, il a été plutôt bien réussi par ceux qui ont eu le temps (ou la présence d'esprit) de s'y intéresser.

Statistiques :

• Pour l'ensemble des 3301 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,418 sur 20 (supérieure de 0,56 point à celle de l'année dernière) et l'écart type vaut 5,93 (quasiment identique à celui de l'année dernière).

• 39 % des candidats ont une note strictement inférieure à 8 (dont 17% ont une note inférieure à 4). Le nombre de copies très faibles (note inférieure à 4) est en baisse de 1,5 % par rapport à l'année dernière.

• 20 % des candidats ont une note comprise entre 8 et 12.

• 23 % des candidats ont une note supérieure ou égale à 16.

Conclusion :

Les correcteurs trouvent la majorité des copies plutôt meilleures que l'année précédente mais déplorent également un nombre assez conséquent de copies complètement « vides » dans lesquelles les candidats font toutes, ou presque toutes, les fautes que l'on peut imaginer, tout en bafouant régulièrement la notion de raisonnement. Sur l'une d'entre elles, les correcteurs ont pu faire connaissance avec le « théorème Durand »…
Malgré tout, le niveau moyen est plus élevé que l'année dernière y compris en informatique, ce qui est un signe encourageant pour les sessions futures.

Les copies sont, dans l'ensemble, bien présentées malgré la présence d'un nombre assez élevé de candidats qui ne respectent pas la numérotation des questions, écrivent mal (ce sont souvent les mêmes) et rendent la tâche du correcteur pénible : qu'ils sachent qu'ils n'ont rien à gagner à pratiquer de la sorte, bien au contraire.
Il reste toujours un noyau de candidats qui ne peuvent s'empêcher de faire du remplissage au lieu d'argumenter face aux questions dont le résultat est donné : aucun correcteur n'est dupe, rappelons-le.

Précisons pour les futurs candidats qu'ils ne sont pas obligés de recopier les énoncés des questions avant de les traiter et qu'ils ne sont pas, non plus, obligés de recopier tout un programme d'informatique si la question posée était seulement de compléter quelques instructions manquantes.

Rappelons, comme d'habitude, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.