BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 298

Conception : EDHEC BS

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 5 mai 2020, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note ${}^tB$ la transposée d'une matrice B et on rappelle que la transposition est une application linéaire.
On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tM=-M$ et on note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère une matrice A fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application f, qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, associe :

$$f(M)=({}^tA)M+MA$$

2) a) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.
   b) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite, on étudie le cas $n=3$ et on choisit $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Tournez la page S.V.P.

3) On considère les trois matrices $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

a) Montrer que la famille $\mathcal{B}=(J,K,L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre et en déduire la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

4) a) Calculer $f(J)$, $f(K)$ et $f(L)$, puis les exprimer comme combinaisons linéaires de J et L seulement. Les calculs devront figurer sur la copie.

b) En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$ ne contenant que des matrices de $\mathcal{B}$.

c) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ puis en donner une base.

5) a) Écrire la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$. On vérifiera que ses coefficients sont tous dans $\{-1\,;0\}$.

b) En déduire les valeurs propres de f.

c) On note Id l'endomorphisme identité de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de $f+Id$ et dire si f est ou n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, où σ est strictement positif. On rappelle que la fonction f_X qui à tout réel x associe $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ est une densité de X et on note F_X la fonction de répartition de X, définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\ F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\,,\ F_X(-x)=1-F_X(x)$.

2) On pose $Y=|X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire.

a) Montrer que la fonction de répartition de Y est la fonction, notée F_Y, définie par :

$$F_Y(x)=\begin{cases}2F_X(x)-1 \text{ si } x\geq 0\\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$$

b) En déduire que Y est une variable à densité et donner une densité f_Y de Y.

c) Montrer que Y possède une espérance et que l'on a $E(Y)=\sigma\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

3) On suppose, dans cette question seulement, que σ est inconnu et on se propose de l'estimer.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ composé de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et ayant toutes la même loi que Y.

On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}Y_k$.

a) Montrer que S_n est un estimateur de σ, donner la valeur de son biais, puis proposer un estimateur sans biais de σ, que l'on notera T_n, construit de façon affine à partir de S_n.

b) Rappeler la valeur du moment d'ordre 2 de X, puis déterminer $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(S_n)$.

c) Déterminer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de σ. En déduire que T_n est un estimateur convergent de σ.

4) On rappelle qu'en `Scilab`, si i et j désignent deux entiers naturels non nuls, la commande `grand(i,j,'nor',m,s)` simule dans un tableau à i lignes et j colonnes, $i \times j$ variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi normale d'espérance m et de variance s^2.
Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de simuler les variables aléatoires S_n et T_n pour des valeurs de n et σ entrées par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
sigma=input('entrez la valeur de sigma :')
X=------ // simulations de X1,…,Xn
Y=------ // simulations de Y1,…,Yn
S=------
T=------
```

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de $]0;1[$. On pose $q=1-p$.
On dispose de deux urnes, l'urne U qui contient n boules numérotées de 1 à n et l'urne V qui contient des boules blanches en proportion p.
On pioche une boule au hasard dans U et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.
Si X prend la valeur k, on pioche k boules dans V, une par une, avec remise à chaque fois de la boule tirée, et on appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1) Dans le cas où $n=1$, reconnaître la loi de Y.

On revient au cas général.

2) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3) Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. Reconnaître la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X=k)$, et en déduire, en distinguant les cas $0 \le i \le k$ et $k < i$, la probabilité $P_{(X=k)}(Y=i)$.

4) On rappelle les commandes `Scilab` suivantes qui permettent de simuler des variables usuelles discrètes :
`grand(1,1,'uin',a,b)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.
`grand(1,1,'bin',n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n, p.
`grand(1,1,'geom',p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
`grand(1,1,'poi',a)` simule une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre a.

Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de simuler les variables X et Y.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
p=input('entrez la valeur de p :')
X=------
Y=------
```

5) a) Justifier que l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y est égal à $[\![0,n]\!]$, puis montrer que :

$$P(Y=0)=\frac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$$

b) Écrire, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la probabilité $P(Y=i)$ sous forme d'une somme de $n-i+1$ termes que l'on ne cherchera pas à simplifier.

6) a) Soit i et k deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq k \leq n$. Montrer l'égalité : $i\binom{k}{i} = k\binom{k-1}{i-1}$.

b) Établir ensuite que Y possède une espérance et que celle-ci est donnée par :

$$E(Y) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k \sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i}\right)$$

c) En déduire que $E(Y) = \dfrac{(n+1)p}{2}$.

7) a) Établir que :

$$\forall n \geq 2,\ E(Y(Y-1)) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1) \sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2} p^i q^{k-i}\right)$$

b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \geq 2,\ E(Y(Y-1)) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

c) Vérifier que cette expression reste valable pour $n = 1$.

d) Exprimer, sans chercher à la calculer, la variance de Y en fonction de $E(Y(Y-1))$ et $E(Y)$.

Problème

On convient que, pour tout réel x, on a $x^0 = 1$.

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence des intégrales :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2}dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$$

2) Calculer I_0 et I_1.

3) a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n$.

b) En déduire I_2.

c) Compléter le script `Scilab` suivant pour qu'il permette le calcul de I_n (dans la variable `b`) et son affichage pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
a=1/2
b=log(2)-1/2
for k=2:n
    aux=a
    a=------
    b=------
end
disp(b)
```

4) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) est convergente et donner sa limite.

5) Établir, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \dfrac{1}{2}$.

6) a) Calculer J_0 puis exprimer, pour tout entier naturel n, $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n.

b) En déduire la valeur de J_1.

7) En utilisant les questions 5) et 6), compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage de I_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
J=log(2)
for k=1:n-1
J=------
end
I=------
disp(I)
```

8) Établir que : $\forall n\in \mathbb{N}^*$, $J_n=(-1)^n\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

9) a) Utiliser les questions 4) et 5) pour déterminer la valeur de $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

b) En déduire la nature de la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ainsi que la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

c) Utiliser la question 5) pour déterminer un équivalent de J_n, du type $\frac{1}{\alpha n}$, avec $\alpha>0$, lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

10) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\ln 2-\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

a) Déduire des questions précédentes un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$

b) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente. Peut-on en déduire la nature de la série de terme général u_n ?

11) On se propose, malgré l'impasse précédente, de montrer que la série de terme général u_n est convergente. Pour ce faire, on admet le résultat suivant : si une suite (x_n) est telle que les suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont convergentes et de même limite ℓ, alors la suite (x_n) converge vers ℓ.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$.

a) Justifier que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $u_k=(k+1)u_{k+1}-ku_k+(-1)^k$.

b) En déduire l'égalité suivante :

$$\forall n\in \mathbb{N}^*,\ S_n=(n+1)u_{n+1}-u_1-\frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right)$$

c) Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} S_{2n}=\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1}=\frac{1}{2}-\ln 2$. Conclure.

12) Des trois résultats suivants, expliquer lequel on vient de démontrer.

a) $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$. b) $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$. c) $\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\frac{1}{2}-\ln 2$.

Éléments de correction

Exercice 1

1) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ n'est pas vide car il contient la matrice nulle qui est antisymétrique. Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel, on montre que $M+\lambda N$ appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) a) On montre (propriétés de la transposition) que ${}^t f(M) = -f(M)$.

b) D'après la question 2a), il reste à montrer que f est linéaire. Grâce à la propriété ${}^t(BC) = {}^tC\,{}^tB$, la linéarité de la transposition et ${}^t({}^tA) = A$, on prouve en effet qu'avec deux matrices M et N de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et λ un réel, on a :

$$f(M+\lambda N) = f(M) + \lambda f(N)$$

3) a) Avec $M = \begin{pmatrix} a & u & x \\ b & v & y \\ c & w & z \end{pmatrix}$, l'égalité ${}^tM = -M$ se traduit par : $a = v = z = 0$ et $b = -u$, $c = -x$, $w = -y$.

On en déduit : $M = u\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

b) Si on se donne trois réels u, x et y tels que $uJ + xK + yL = 0$, alors on a assez vite $u = x = y = 0$ (voir ci-dessus). La famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est donc une famille libre, ainsi c'est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = 3$.

4) On trouve :

- $f(J) = = -J - L$.
- $f(K) = 0$
- $f(L) = -L$.

b) $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(J), f(K), f(L)) = \mathrm{Vect}(-J-L, 0, -L) = \mathrm{Vect}(J, L)$.
(J, L) est génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ et elle est libre donc c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2 donc $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1 et on trouve que (K) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

5) a) On a $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Les valeurs propres de *f* sont donc –1 et 0.

c) On a $F + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on voit que $\mathrm{rg}(F+I) = 2$.

On en déduit $\mathrm{rg}(f + Id) = 2$, puis $\dim(\mathrm{Ker}(f + Id)) = 1$.
Pour finir, la somme des dimensions des sous-espaces propres de *f* est égale à 2 et est donc différente de la dimension de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
Conclusion : f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

1) Par définition, on a : $F_X(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f_X(t)\,dt$. En effectuant le changement de variable $u = -t$, on obtient, par parité de f_X : $F_X(-x) = \int_x^{+\infty} f_X(u)\,du$.
On a donc bien : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$

2) a) .• D'ores et déjà, on a : $\forall x < 0$, $F_Y(x) = 0$.

- Pour tout *x* positif, on a :

$$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x) = 2F_X(x) - 1$$

b) • F_Y est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 (théorèmes généraux).

- F_Y est continue en 0 (grâce à $F_X(0) = \dfrac{1}{2}$).

Conclusion : *Y* est une variable à densité.
On obtient une densité f_Y de *Y* en dérivant F_Y sauf en 0, et en posant, par exemple, $f_Y(0) = \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, ce qui donne : $f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$.

c) Pour tout réel $A \geq 0$: $\int_0^A x\, f_Y(x)dx = \dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{A^2}{2\sigma^2}\right)\right)$.

Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x\, f_Y(x)dx$ est absolument convergente et elle vaut $\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$. Pour finir, $\int_{-\infty}^0 x\, f_Y(x)dx = 0$ donc Y a une espérance et : $E(Y) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

3) a) S_n est fonction de l'échantillon $(Y_1,...,Y_n)$, mais pas fonction de σ donc S_n est un estimateur de σ.

De plus, par linéarité de l'espérance, on trouve : $E(S_n) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Le biais de S_n est donc : $b_\sigma(S_n) = E(S_n) - \sigma = \sigma\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} - 1\right)$.

$T_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, S_n$ est donc un estimateur sans biais de σ.

b) On a $E(Y^2) = E(X^2) = \sigma^2$.

On trouve alors : $V(Y) = \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$. Ensuite, par mutuelle indépendance des variables Y_1, Y_2, ..., Y_n, on obtient : $V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$.

c) Le risque quadratique de T_n est $r_\sigma(T_n) = V(T_n) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

On a $\lim_{n \to +\infty} r_\sigma(T_n) = 0$ donc T_n est un estimateur convergent de σ.

4) On peut proposer :

```
n=input('entrez la valeur de n :')
sigma=input('entrez la valeur de sigma :')
X=grand(1,n,'nor',0,sigma) // simulations de X1,…,Xn
Y=abs(X) // simulations de Y1,…,Yn
S=mean(Y)// on aurait pu écrire sum(Y)/n
T=sqrt(%pi/2)*S
```

Exercice 3

1) Avec $n = 1$, X est la variable certaine égale à 1. On pioche alors une boule dans l'urne V et cette boule est blanche avec la probabilité p, ce qui montre que Y suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

2) La loi de X est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

On en déduit : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.

3) Comme Y compte le nombre de boules blanches obtenues lors de tirages indépendants, on peut affirmer que la loi de Y, conditionnellement à l'événement $(X=k)$, est la loi binomiale de paramètres k et p. On a donc :

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!],\ P_{(X=k)}(Y=i)=\begin{cases}\binom{k}{i}p^iq^{k-i} & \text{si } 0 \leq i \leq k\\ 0 & \text{si } k<i\end{cases}$$

4) On peut proposer :

```
n=input('entrez la valeur de n :')
p=input('entrez la valeur de p :')
X=grand(1,1,'uin',1,n)
Y=grand(1,1,'bin',X,p)
```

5) a) On a : $Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$.
Grâce à la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(X=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, on trouve $P(Y=0)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q^k=\dfrac{q(1-q^n)}{n(1-q)}$.

b) Toujours avec la formule des probabilités totales associée au même système complet d'événements, on trouve $P(Y=i)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^iq^{k-i}$.

6) a) On a, pour $k \geq i \geq 1$: $i\binom{k}{i}=k\times\dfrac{(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!}=k\binom{k-1}{i-1}$.

b) On a $E(Y)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}i\binom{k}{i}p^iq^{k-i}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}i\binom{k}{i}p^iq^{k-i}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}$.

c) Avec le changement d'indice $j=i-1$, suivi de la formule du binôme, on trouve $E(Y)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}p^{j+1}q^{k-1-j}=\dfrac{p}{n}\sum_{k=1}^{n}k(p+q)^{k-1}=\dfrac{p}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{(n+1)p}{2}$.

7) a) On a, pour $n \geq 2$: $E\big(Y(Y-1)\big)=\sum_{i=2}^{n}i(i-1)P(Y=i)$. En remplaçant la probabilité : $E\big(Y(Y-1)\big)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=i}^{n}i(i-1)\binom{k}{i}p^iq^{k-i}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=2}^{k}i(i-1)\binom{k}{i}p^iq^{k-i}$.
En revenant aux factorielles, on a $i(i-1)\binom{k}{i}=k(k-1)\binom{k-2}{i-2}$, ce qui permet d'écrire :

$$E\big(Y(Y-1)\big)=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\sum_{i=2}^{k}\binom{k-2}{i-2}p^iq^{k-i}$$

b) Toujours avec $n \geq 2$, le changement d'indice $j = i - 2$ donne :

$E\big(Y(Y-1)\big) = \dfrac{p^2}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\sum_{j=0}^{k-2}\binom{k-2}{j} p^j q^{k-2-j} = \dfrac{p^2}{n}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)(p+q)^{k-2}$.

En ajoutant le terme d'indice 1, on a :

$$E\big(Y(Y-1)\big) = \frac{p^2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

On trouve après quelques calculs :

$$E\big(Y(Y-1)\big) = \frac{(n^2-1)p^2}{3}$$

c) Cette formule reste valable pour $n = 1$, puisqu'elle donne $E\big(Y(Y-1)\big) = 0$, ce qui est correct puisque, dans ce cas, Y ne prend que les deux valeurs 0 ou 1.

d) Par linéarité de l'espérance, on a : $E(Y^2) = E\big(Y(Y-1)\big) + E(Y)$.

Pour finir, on sait (Koenig-Huygens) que $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$ donc on a :

$$V(Y) = E\big(Y(Y-1)\big) + E(Y) - E(Y)^2$$

Problème

1) I_n et J_n existent en tant qu'intégrales d'une fonction continue sur un segment.

2) On trouve $I_0 = \dfrac{1}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right)dx = \ln 2 - I_0 = \ln 2 - \frac{1}{2}$

3) a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a, par linéarité de l'intégration :

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$$

b) Avec la relation précédente, en faisant $n = 0$, on trouve : $I_2 = \dfrac{3}{2} - 2\ln 2$

c) D'après la question 3a), on peut proposer :

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
a=1/2 // ici, on donne I0
b=log(2)-1/2
for k=2:n
    aux=a
    a=b
    b=1/(k-1)-2*a-aux
end
disp(b)
```

4) a) Pour tout x de $[0,1]$, on montre que : $0 \leq \dfrac{x^n}{(1+x)^2} \leq x^n$.

En intégrant ces fonctions continues de 0 à 1, bornes dans l'ordre croissant, on trouve : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b) Par encadrement, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

5) Dans l'intégrale I_n, on pose $u'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ et $v(x) = x^n$, ce qui donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$$

6) a) • On a $J_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \big[\ln(1+x)\big]_0^1 = \ln 2$.

• Par linéarité de l'intégration, on trouve : $J_n + J_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En donnant à n la valeur 0, on obtient : $J_1 = 1 - \ln 2$.

7) On peut proposer :

```
n=input('donnez une valeur pour n :')
J=log(2) // J0
for k=1:n-1
J=1/k-J
end
I=n*J-1/2 // calcul de In d'après 5)
disp(I)
```

8) Par récurrence :

• Pour $n = 1$, la formule proposée donne $J_1 = -(\ln 2 - 1) = 1 - \ln 2$, ce qui est correct.

• Si l'on suppose que, pour un certain entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a $J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$, alors, d'après la question 6a), on obtient :

$$J_{n+1} = \frac{1}{n+1} - (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

En remarquant que $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$, on trouve :

$$J_{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$$

- On a montré par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = (-1)^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)$.

9) a) Le résultat de la question 5) peut s'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = \frac{2I_{n+1}+1}{2n+2}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

b) On a $|J_n| = \left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right|$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = 0$ et on peut conclure : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Par définition, ceci veut dire que la série de terme général $\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente et que l'on a de plus : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

c) Comme $J_n = \frac{2I_{n+1}+1}{2n+2}$ et comme $\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = 0$, on a : $J_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

10) a) On a $u_n = \ln 2 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$ donc $u_n = (-1)^n J_n$, ce qui donne : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{2n}$.

b) On a $\frac{(-1)^n}{2n} = -\frac{1}{2} \times \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{2n}$ est convergente (série proportionnelle à une série convergente).
En revanche, le critère d'équivalence étant réservé aux séries à termes positifs, on ne peut rien conclure, de cette manière, en ce qui concerne la série de terme général u_n.

11) a) On a $u_{k+1} = \ln 2 - \sum_{j=1}^{k+1} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$ et ainsi : $u_{k+1} = u_k - \frac{(-1)^k}{k+1}$.

On en déduit : $u_k = (k+1)u_{k+1} - ku_k + (-1)^k$.

b) En sommant on obtient : $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)u_{k+1} - ku_k) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$.

On a alors, en remplaçant la somme de gauche par S_n :

$$S_n = (n+1)u_{n+1} - u_1 - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$$

..**c)** On a $S_{2n} = (2n+1)u_{2n+1} - u_1 = (2n+1)u_{2n+1} - \ln 2 + 1$.

On sait que $u_{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2(2n+1)}$, d'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = \dfrac{1}{2} - \ln 2$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$ et comme $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \frac{1}{2} - \ln 2$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, la suite (S_n) est convergente (de limite $\dfrac{1}{2} - \ln 2$), ce qui, par définition de la convergence d'une série, signifie que la série de terme général u_n est convergente, sa somme étant égale à $\dfrac{1}{2} - \ln 2$.

12) Par définition, on a :

$$u_k = \ln 2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

Ainsi, c'est la réponse c) qui est la bonne :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} - \ln 2$$

Concours d'admission sur classes préparatoires
Option économique

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2020

Présentation de l'épreuve

- L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
- Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième et troisième exercices).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

- Des questions d'informatique étaient proposées dans les exercices 2 et 3, ainsi que dans le problème.
- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, avec quelques questions particulièrement difficiles où les candidats étaient « bien accompagnés » mais dans lesquelles, malgré tout, seuls les très bons candidats ont pu tirer leur épingle du jeu en montrant leur capacité à mener un calcul compliqué à son terme ainsi que leur faculté à raisonner sur des situations abstraites.

Description du sujet

L'exercice 1 comptait pour environ 20% du total.

Cet exercice a été souvent bien réussi, mais seulement par les candidats que l'algèbre linéaire ne rebute pas trop. Les autres se contentant de traiter les questions 4a), 5a) et 5b), les autres questions donnant lieu à de très grosses confusions.

L'exercice 2 comptait pour environ 19% du total

Cet exercice a permis aux candidats les moins aguerris de se refaire partiellement une santé sur les questions d'estimation, mais beaucoup n'ont pas su traiter les deux premières questions, difficiles et techniques.

L'exercice 3 comptait pour environ 24% du total

Cet exercice a permis de départager de façon tranchée les candidats. Il est, de loin, le moins bien réussi de cette épreuve, même si de nombreux candidats ont correctement traité les trois premières questions, mais, comme le fait remarquer une correctrice, la suite fut beaucoup moins traitée. Presque tous les correcteurs signalent les libertés prises par les candidats avec la rigueur, voire des « résultats arrangés » dans les calculs de sommes (simples ou doubles).

Le problème comptait pour environ 37% du total

Le problème a été abordé avec des fortunes diverses, un nombre non négligeable de candidats se trompant en calculant I_0, I_1 et J_0, mais la majorité d'entre eux ont su profiter des quelques questions faciles qui émaillaient ce problème. Un correcteur remarque : « À partir de la question 8, le niveau des questions est difficile pour la plupart des candidats ».

Signalons également que les questions dont le résultat dépend d'un entier naturel n ne doivent pas forcément faire l'objet d'un raisonnement par récurrence !

Conclusion

Comme l'année dernière, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les questions les plus subtiles, qui demandent une compréhension fine de la théorie, quel que soit le domaine concerné, échappent à presque tous les candidats. Les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes mais ne comprennent pas forcément en profondeur ce qu'ils font.

Les copies sont, à de pénibles exceptions près, agréablement présentées et bien rédigées mais il reste des candidats (environ 10%) qui rendent pratiquement un brouillon, souvent très difficile à lire car lettres et chiffres sont mal calligraphiés, les questions étant parfois traitées dans un désordre indescriptible ce qui ne joue absolument pas en faveur du candidat. Certaines copies ont été qualifiées de « très sales » voire « illisibles » ! De nombreux correcteurs s'insurgent contre l'utilisation d'abréviations comme Ccl, SCE, FPT, KH, FBN, IPP, TLM, SATP, tq, STG, CV, C̲, var, dc, ce qui dénote un manque de respect et un certain laisser-aller, indigne d'un candidat sérieux.

Sur le fond, un nombre non négligeable de candidats restent adeptes du bluff : il faut savoir que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable. Ce fut très souvent le cas dans les calculs des espérances $E(Y)$ et $E\big(Y(Y-1)\big)$ de l'exercice 3.

Pour terminer ce paragraphe, il faut parler d'un nombre imposant d'escrocs qui, lorsque les résultats sont donnés, écrivent n'importe quoi pour arriver à leurs fins (probabilités dans l'exercice 3 notamment).

Rappelons, une fois encore, que l'honnêteté, la simplicité, la précision et la rigueur sont des vertus attendues par tous les correcteurs sans exception, et qu'une bonne réponse est toujours une réponse construite rigoureusement.